5. Sommes de carrés

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

5. Sommes de carrés

Avant d'exposer, dans le cas des bicarrés et dans celui des cubes, le principe des méthodes élémentaires, puis de donner une démonstration simple du théorème de Hilbert, nous tenons à rappeler très brièvement quelques résultats essentiels sur les sommes de carrés.

Le résultat essentiel sur les sommes de 2 carrés, énoncé en 1625 par Girard puis un peu plus tard par Fermat, démontré en 1749 par Euler, est le suivant: N est somme de 2 carrés si et seulement si les nombres premiers de la forme $4n + 3$ qui figurent dans sa décomposition y figurent avec un exposant pair — en autres termes, si N est le produit d'un carré par un entier composé uniquement avec des facteurs premiers 2 ou de la forme $4n + 1$. On notera que les sommes de 2 carrés forment une suite de densité asymptotique nulle (la densité jusqu'à x est équivalente à $1/\mathrm{Log}\, x$).

Par souci d'ordre, énonçons le théorème de Lagrange: tout N (positif ou nul) est somme de 4 carrés (positifs ou nuls). On en trouvera un peu partout des démonstrations très nombreuses et plus ou moins variées...

Le problème de déterminer les sommes de 3 carrés est beaucoup plus difficile que les précédents. Il est en liaison très étroite avec la théorie des formes quadratiques binaires. Legendre, en 1798, puis Gauss, en 1801, ont établi le résultat suivant: N est somme de 3 carrés si et seulement si il n'est pas de la forme $4^k(8n+7)$.

On remarquera pour terminer que le résultat sur les nombres triangulaires est un corollaire immédiat du théorème des 3 carrés. En effet

$$m = \frac{a(a+1)}{2} + \frac{b(b+1)}{2} + \frac{c(c+1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow \# \; 8m + 3 = (2a+1)^2 + (2b+1)^2 + (2c+1)^2$$

et les entiers de la forme $8m + 3$ sont bien sommes de 3 carrés (impairs, pour de banales raisons de congruences modulo 8).

6. Sommes de bicarrés

Nous allons rapporter la méthode de Liouville, puis nous indiquerons ensuite très sommairement comment la majoration obtenue peut être améliorée en conservant les méthodes élémentaires.