7. Sommes de cubes

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **05.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

On considère l'identité

$$6(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+a_4{}^2)^2 = \sum_{i<j} [(a_i+a_j)^4 + (a_i-a_j)^4] = B_{12},$$

en désignant par B_q un entier qui est somme de q bicarrés (en fait, l'identité que nous donnons ici est due à Lucas, mais celle qu'utilisait Liouville lui est équivalente). Comme tout entier est somme de 4 carrés, on obtient ainsi

$$6a^2 = B_{12}, \text{ pout tout } a,$$

puis

$$6m = 6(a^2+b^2+c^2+d^2) = B_{48}, \text{ pour tout } m,$$

et enfin, comme tout entier n est de la forme $6m + h \,.\, 1^4$ (avec $h = 0, 1, ..., 5$),

$$n = B_{53}, \text{ pour tout } n, \text{ i.e. } g(4) \leqslant 53,$$

ce qui est très exactement le résultat donné par Liouville.

Pour améliorer cette majoration, on a utilisé essentiellement, outre diverses petites astuces, deux remarques:

— certains entiers a peuvent s'écrire $a = a_1{}^2 + a_2{}^2 + 2a_3{}^2$, de sorte qu'alors $6a^2 = B_{11}$;

— certains entiers m peuvent s'écrire comme sommes de 3 carrés.

Mais on peut faire un peu mieux. L'idée que nous exposerons pour les sommes de cubes et surtout pour la démonstration générale du théorème de Hilbert nous a permis de « partir » de sommes de 2 carrés au lieu de sommes de 3, et nous avons ainsi obtenu $g(4) \leqslant 30$. C'est la meilleure majoration actuellement connue, mais il est vraisemblable que ce n'est pas pour bien longtemps, des travaux sont en cours où les méthodes analytiques reprendraient leurs droits...

Signalons pour terminer ce paragraphe la majoration $g(4) \geqslant 19$. Des tables numériques extrêmement étendues ont été calculées qui laissent à penser qu'il n'y a que 7 entiers qui nécessitent 19 bicarrés: 79, 159, 239, 319, 399, 479 et 559.

7. Sommes de cubes

L'identité « historique » est

$$6x(x^2+a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2) = \sum_i [(x+a_i)^3 + (x-a_i)^3] = C_6,$$

en désignant par C_q un entier qui est somme de q cubes. Cette identité permet de montrer qu'un nombre de la forme $6x\,(x^2+m)$ est C_6 sous deux conditions. La première, mineure, est que m soit une somme de 3 carrés; la seconde, beaucoup plus gênante mais essentielle pour que les cubes soient positifs, est que m ne soit pas trop grand (on devra imposer a priori $0 \leqslant m \leqslant x^2$). Toute la difficulté est alors de « raccrocher » un entier quelconque à un nombre $6x\,(x^2+m)$ convenable.

Nous allons exposer une manière de le faire, qui utilise des « cubes arbitraires » et une seconde identité algébrique, dans l'esprit de notre démonstration du théorème de Hilbert. Mais nous devrons tout d'abord modifier la première identité en lui ajoutant 2 carrés:

$$10x^3 + 6x\,(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+a_4{}^2+a_5{}^2) = \sum_i \left[(x+a_i)^3 + (x-a_i)^3\right],$$

soit, de manière abrégée,

$$10x^3 + 6xm = C_{10}$$

Moyennant certaines conditions de congruences modulo 8 et certaines majorations sur m (que nous verrons plus tard), les 2 carrés $a_4{}^2$ et $a_5{}^2$ peuvent être choisis arbitrairement, ce qui revient encore à dire que les deux cubes $(x-a_4)^3$ et $(x-a_5)^3$ peuvent être choisis arbitrairement. Nous les prendrons alors égaux tous deux à t^3 (nous verrons plus tard également comment choisir t) et nous utiliserons l'identité

$$2t^3 = (t+1)^3 + (t-1)^3 - 6t\,.$$

Et, en négligeant les diverses conditions qui devront être satisfaites, on obtient le résultat brut que non seulement les nombres $10x^3 + 6xm$, mais aussi ceux $10x^3 + 6xm + 6t$ sont C_{10}. Pour simplifier la présentation, nous commencerons par réécrire l'identité initiale en tenant compte de la seconde:

$$\begin{aligned} &10x^3 + 6xm + 6t \\ &\quad = 10x^3 + 6x\left(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+2\,(x-t)^2\right) + 6t = C_{10}\,. \end{aligned}$$

Sous les deux conditions

$$\begin{cases} m \equiv 3 \text{ ou } 5 \,(\text{mod. } 8) \\ 2x^2 \leqslant m \leqslant \dfrac{17}{8}\,x^2 \end{cases}$$

nous pourrons choisir t quelconque dans l'intervalle $[1, \frac{1}{4}x]$. Cette limitation (qui ne peut guère être relâchée) ne permet pas de « couvrir la plage » comprise entre deux valeurs acceptables consécutives de m et nous devrons introduire un cube supplémentaire, qui permettra par la même occasion de régler les questions de congruences modulo 6.

En posant $m = 2x^2 + n$, on écrira un entier N comme somme de 11 cubes en suivant le processus suivant:

— on prend pour x le plus grand entier tel que

$$22x^3 + 6(5x) + 125 \leqslant N$$

(le terme $5x$ provient des conditions de congruences sur m: dans certains cas, on ne pourra pas choisir n inférieur à 5; le terme 125 provient de la condition de congruence modulo 6 — qu'on verra un peu plus loin — sur le 11e cube: dans certains cas, on ne pourra pas le choisir inférieur à $5^3 = 125$);

— on prend pour n le plus grand entier acceptable modulo 8 tel que

$$22x^3 + 6xn + 125 \leqslant N,$$

et on a alors un reste défini par

$$N = 22x^3 + 6xn + r;$$

— on choisit enfin h le plus grand entier congru à r modulo 6 et tel que

$$h^3 \leqslant r.$$

Comme $h^3 \equiv h$ (mod. 6), on a donc $r = h^3 + 6t$, avec les majorations

$$r \leqslant 6(6x) + 125$$

$$6t \leqslant 3r^{2/3}$$

et l'on constate que l'on obtient une valeur admissible pour t (i.e. vérifiant $t \leqslant \frac{1}{4}x$) dès que $x \geqslant 10\,375$, ce qui sera le cas dès que $N \geqslant 2{,}4569.10^{13} > 22\,(10\,375)^3$. On remarquera qu'à cette valeur, il y a belle lurette que les intervalles $[22x^3, 22\frac{3}{4}x^3]$ se recouvrent (ces intervalles correspondent à la condition d'encadrement donnée plus haut pour m).

Tout entier à partir de $2{,}4569.10^{13}$ étant donc somme de 11 cubes (positifs) il reste, pour finir de prouver la majoration

$$g(3) \leqslant 11\,,$$

à montrer que tous les entiers inférieurs à cette limite sont également C_{11}. La vérification numérique se fait par une méthode de descente très simple, en ôtant de chaque entier le plus grand cube inférieur ou égal (avec une légère modification pour les deux dernières étapes): il suffit que tout entier inférieur à $2{,}5355.10^9$ soit C_{10}, que tout entier inférieur à $5{,}578.10^6$ soit C_9, que tout entier compris entre 240 et 94 758 soit C_8, et enfin que tout entier compris entre 455 et 6 665 soit C_7. Cette dernière condition résulte des tables connues (jusqu'à 40 000, 239 est le plus grand nombre qui nécessite 9 cubes, 454 le plus grand qui en nécessite 8, tous ceux au-delà étant C_7).

8. Intermède: le problème facile de Waring

Alias « the easier problem of Waring ».

Ce problème nous sera utile non pas pour son énoncé et ses résultats mais pour les identités qui interviennent dans sa résolution. Il s'agit d'écrire tout entier sous la forme $N = \pm\, y_1{}^k \pm y_2{}^k \pm \ldots \pm y_s{}^k$ (les y_j étant des entiers positifs, mais cela n'a guère d'importance) et d'établir l'existence d'une constante $v(k)$ telle que l'on puisse toujours prendre $s \leqslant v(k)$.

On utilise des identités valables pour les entiers dans certaines progressions arithmétiques. Ainsi pour les cubes:

$$6n = (n+1)^3 + (n-1)^3 - 2n^3$$

$$6n + 3 = (2n-5)^3 + n^3 - (2n-4)^3 - (n-4)^3$$

et pour les bicarrés:

$$4\,080n = (2n-1)^4 + (n+8)^4 - (2n+1)^4 - (n-8)^4$$

L'existence de $v(k)$ dans le cas général résulte de l'identité

$$n^k - C_{k-1}^1 (n-1)^k + C_{k-1}^2 (n-2)^k - \ldots + (-1)^{k-1} (n-k+1)^k = k\,!\,n + \beta$$

(β entier indépendant de n)

(la démonstration est immédiate: calcul de la $(k-1)$-ième différence finie du polynôme x^k).