IV. Premier choix de E

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

$$|P_1|_1 \leqq 2^{d_1} |P|_2 ,$$

où d_1 désigne le degré de P_1.

IV. Premier choix de E

Si x est un élément de A, on définit la hauteur de x par la formule

$$h(x) = \max_i |\sigma_i(x)| .$$

Soit Q un polynôme unitaire à coefficients dans A et qui ne s'annule pas à l'origine. Nous nous proposons de majorer le nombre de points x de A de hauteur au plus égale à a et tels que $Q(x)$ soit une unité.

Nous allons utiliser le plongement logarithmique de K^*. Il nous faut encore introduire quelques définitions.

Soit r_1 le nombre des indices i tels que l'image de K par σ_i soit inclue dans le corps des réels; alors les autres indices sont en nombre pair $2r_2$. On peut numéroter les σ_i de sorte que l'image de σ_i soit contenue dans $\mathbf{R}$ pour $i \leqq r_1$ et que $\sigma_{j+r_2} = \bar{\sigma}^j$ pour $r_1 + 1 \leqq j \leqq r_1 + r_2$.

Le plongement logarithmique de K^* dans $\mathbf{R}^{r_1+r_2}$ est l'application L définie par la flèche

$$x \to (\mathrm{Log}\,|\sigma_1(x)|, \ldots, \mathrm{Log}\,|\sigma_{r_1+r_2}(x)|) .$$

Soient A^* l'ensemble des entiers non nuls et U l'ensemble des unités de A. On sait que le noyau de la restriction de L à A^* est constitué par les racines de l'unité contenues dans K.

L'image $L(U)$ est contenue dans l'hyperplan W d'équation

$$\sum_{i=1}^{r_1} y_i + 2 \sum_{j=r_1+1}^{r_1+r_2} y_j = 0 .$$

Ceci ne fait que traduire le fait que x est une unité si et seulement si sa norme a pour module 1.

On montre facilement que l'image $L(U)$ est un sous-groupe discret de W; son rang est donc majoré par $r = r_1 + r_2 - 1$. En fait le théorème de Dirichlet dit que le rang de $L(U)$ est exactement r, mais cette majoration nous suffira.

Revenons au polynôme Q et posons

$$u_a(Q) = \mathrm{Card}\,\{x \mid x \in A, h(x) \leqq a \quad \text{et} \quad Q(x) \in U\}$$

Nous cherchons à majorer $u_a(Q)$.

Un polynôme de degré donné ne peut prendre une certaine valeur qu'un nombre de fois au plus égal à son degré.

D'où l'inégalité

$$u_a(Q) \leqq \deg Q \,.\, \mathrm{card}\,(\{\, Q(x) \mid x \in A \quad \text{et} \quad h(x) \leqq a \,\} \cap U)\,.$$

Désignons par w le nombre de racines de l'unité contenues dans K. D'après la caractérisation du noyau de $L_{|U}$ et l'inégalité précédente, on obtient:

$$(1) \qquad u_a(Q) \leqq w \,.\, \deg Q \,.\, \mathrm{card}\,(J \cap R)\,,$$

où on a posé

$$J = L(\{\, Q(x) \mid x \in A \quad \text{et} \quad h(x) \leqq u \,\})\,, \quad R = L(U)\,.$$

Pour majorer le nombre d'éléments de $J \cap R$, nous procéderons en deux étapes:

1° L'image J est contenue dans une certaine boule B de l'espace $\mathbf{R}^{r_1+r_2}$.

2° On majore le nombre d'éléments de R contenus dans la boule B.

Première étape.

Soit S un réel $\geqq 1$ qui sera fixé ultérieurement. On suppose que le polynôme satisfait à la condition

$$|\, Q \,|_1 \leqq S\,.$$

Désignons par $\|\ \|$ la norme euclidienne de $\mathbf{R}^{r_1+r_2}$.

Démontrons le résultat suivant:

LEMME 5. *Soit $a \geqq 2$. Il existe une constante C_0 explicite, qui ne dépend que de S et de K, telle que si x vérifie $h(x) \leqq a$ et si $Q(x)$ est non nul on ait l'inégalité :*

$$\|\, L(Q(x)(\,\| \leqq C_0 \,.\, \mathrm{Log}\, a \,.\, \deg Q\,.$$

Démonstration :

Posons $x' = Q(x)$ pour un certain x de hauteur majorée par a et tel que $Q(x)$ soit non nul.

On a d'abord l'inégalité évidente

$$\|\, L(x')\,\| \leqq (r_1 + r_2) \max_i \left(|\, \mathrm{Log}\,|\, \sigma_i(x')\,|\,|\right).$$

Pour majorer $|\operatorname{Log}|\sigma_i(x')||$, on majore $\operatorname{Log}|\sigma_i(x')|$ puis on le minore. Autrement dit, on encadre $|\sigma_i(x')|$.

— *majoration des* $|\sigma_i(x')|$.

Reprenons la notation

$$Q = b_0X^d + b_1X^{d-1} + \ldots + b_d .$$

On a alors l'inégalité

$$|\sigma_i(x')| \leqq \sum_{j=0}^{d} |\sigma_i(b_jx^{d-j})| .$$

On en déduit facilement l'inégalité

$$|\sigma_i(x')| \leqq S\,a^d .$$

— *minoration des* $|\sigma_i(x')|$.

Le procédé est classique. Du fait que x' est entier non nul, il a une norme au moins égale à 1 en module. D'où l'inégalité

$$|\sigma_i(x')| \geqq \prod_{j\neq i} |\sigma_j(x')|^{-1} .$$

Grâce à la majoration précédente des $|\sigma_j(x')|$, on obtient l'inégalité

$$|\sigma_i(x')| \geqq |Sa^d|^{1-n} \geqq |Sa^d|^{-n} .$$

De cet encadrement des $|\sigma_i(x')|$, on déduit la majoration

$$|\operatorname{Log}|\sigma_i(x')|| \leqq n\,.\operatorname{Log}(Sa^d) .$$

D'où l'inégalité

$$||L(x')|| \leqq (r_1+r_2)\,n\,.\operatorname{Log}(Sa^d) .$$

Si on pose

$$\lambda = 1 + \frac{\operatorname{Log} S}{\operatorname{Log} 2},$$

en tenant compte de l'hypothèse $a \geqq 2$, on voit que l'on a

$$\operatorname{Log}(Sa^d) \leqq \lambda \operatorname{Log} a .$$

D'où finalement l'inégalité

$$||L(x')|| \leqq \deg Q\,.\,C_0\,.\operatorname{Log} a$$

où on a posé

$$C_0 = n(r_1 + r_2) \,.\, \lambda \,.$$

Ceci achève la démonstration du lemme.

Le lemme équivaut à dire que J est contenu dans la boule B de rayon $b = \deg Q \,.\, C_0 \,.\, \operatorname{Log} a$. Remarquons que b est au moins égal à $\operatorname{Log} 2$.

Deuxième étape.

LEMME 6. *Soit b un réel au moins égal à $\operatorname{Log} 2$. Il existe une constante C_1 explicite, qui ne dépend que de K, telle que le nombre d'éléments du réseau R contenus dans la boule B de rayon b soit majoré par $C_1 b^r$.*

Démonstration :

Soit D le parallélotope fondamental de R.

Il est clair que le nombre m de points de R contenus dans la boule B est majoré par le nombre de mailles de R qui rencontrent B. De plus toutes les mailles qui rencontrent B sont contenues dans la boule B' de rayon $b + S$, où S désigne le diamètre de D.

En comparant les volumes (calculés dans W), on obtient l'inégalité

$$m \,.\, \operatorname{vol}(D) \leqq \operatorname{vol} B'.$$

Soit V le volume de la boule unité. L'inégalité précédente conduit à

$$m \leqq V(b+S)^r (\operatorname{vol} D)^{-1}.$$

Comme b est au moins égal à $\operatorname{Log} 2$, le nombre $b + S$ est majoré par μb où μ vaut $1 + \dfrac{S}{\operatorname{Log} 2}$.

D'où l'inégalité

$$m \leqq C_1 b^r ,$$

où on a posé

$$C_1 = V\mu (\operatorname{vol} D)^{-1} .$$

On voit que connaissant K on peut calculer explicitement S et vol D, donc C_1 est bien explicite. Ceci achève la démonstration du lemme.

Conclusion.

THÉORÈME 1. *Soit P un polynôme unitaire à coefficients entiers et qui ne s'annule pas à l'origine. Pour tout $a \geqq 2$, il existe une constante C calculable explicitement et qui ne dépend que de $\deg P$, $|P|_2$ et K, telle que si P est réductible alors on a l'inégalité :*

$$i_a(P) + 2u_a(P) \leqq C(\operatorname{Log} a)^r .$$

(Où $i_a(P)$ désigne le nombre de points x de hauteur majorée par a et tels que $P(x)$ soit un élément irréductible de A).

Démonstration :

Soient P_1 et P_2 deux polynômes à coefficients dans A et de produit P. D'après le lemme 1, nous avons l'inégalité

$$i_a(P) + 2u_a(P) \leqq u_a(P_1) + u_a(P_2) .$$

Soit S le nombre $2^{d-1}|P|_2$; le lemme 4 montre que $|P_1|_1$ et $|P_2|_1$ sont majorés par S.

Nous pouvons maintenant appliquer les lemmes 5 et 6 aux polynômes P_1 et P_2. En tenant compte de l'inégalité (1), nous obtenons les majorations

$$\begin{aligned} u_a(P_1) + u_a(P_2) &\leqq w\, C_1 (C_0 \operatorname{Log} a)^r \left((\deg P_1)^{r+1} + (\deg P_2)^{r+1}\right) \\ &\leqq 2w\, C_1 (C_0 \operatorname{Log} a)^r (\deg P)^{r+1} . \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration du théorème.

Remarque. L'inégalité $a \geqq 2$ n'a été introduite que pour éviter des complications inutiles. Le théorème reste vrai pourvu que l'on suppose $a \geqq \alpha_0$ avec α_0 fixé, $\alpha_0 > 1$, mais cette fois la constante C dépend de α_0.

CRITÈRE 1. *S'il existe $a \geqq 2$ tel que l'on ait l'inégalité*

$$i_a(P) + 2u_a(P) > C(\operatorname{Log} a)^r$$

alors le polynôme P est irréductible dans $K[X]$.

V. DEUXIÈME CHOIX DE E

THÉORÈME 2. *Soit P un polynôme unitaire réductible qui ne s'annule pas à l'origine et à coefficients dans A. Désignons par S le nombre $2^{d-1}|P|_2$, où d est le degré de P.*