Objekttyp: **ReferenceList**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

on the Borel sets of R^n. Since for any set $A \subset R^n$, there exists a G_δ set $B \supset A$ with $L(B) = L(A)$, it follows that

$$L(A) \leqslant \Phi_{\mathscr{G},M}(A) \leqslant \Phi_{\mathscr{G},M}(B) = L(B) = L(A),$$
$$\Phi_{\mathscr{G},M}(A) = L(A).$$

Having proved $\Phi_{\mathscr{G},M} = L$, we apply Theorems 2 and 3 to conclude

$$L \leqq \varphi_{\mathscr{F},M} \leqq \Phi_{\mathscr{F},M} \leqq \Phi_{\mathscr{G},M} = L,$$

and the proof is complete.

Corollary 1. [1, p. 163]. Hausdorff n-dimensional sphere outer measure in R^n agrees with L on all the subsets of R^n.

Proof. Recall that Hausdorff n-dimensional sphere outer measure is the outer measure $\Phi_{\mathscr{F},L}$ where $\mathscr{F}$ is the set of all spheres in R^n. Application of Theorem 5 is immediate.

Corollary 2. [5]. Hausdorff n-measure in R^n agrees with L on all subsets of R^n.

Proof. Recall that Hausdorff n-measure is the outer measure $\Phi_{\mathscr{F},M}$ where $\mathscr{F}$ is the set of all subsets of R^n and $M(A) = (n!)^{-1}\,\Gamma(\frac{1}{2})^{n-1}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)(\operatorname{diam} A)^n$. In Theorem 5, take α to be an n-sphere. The isodiametric inequality implies that $M \geqslant L$ on $\mathscr{F}$ and $M = L$ on $\mathscr{G}$. Application of Theorem 5 completes the proof.

Corollary 3. L is invariant under rotation.

Proof. For a fixed rotation, merely take $\mathscr{F}$ to be the set of rotated n-cubes and $M = L$.

The author wishes to acknowledge the interesting correspondence with Professor Arthur B. Brown which initiated this paper.

REFERENCES

[1] HAUSDORFF, F. Dimension und ausseres Mass, *Math. Ann.*, 79 (1918), pp. 157-179.
[2] MUNROE, M. E. *Introduction to Measure and Integration*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1953.
[3] RUDIN, W. *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, N.Y., 1966.
[4] SAKS, S. *Theory of the Integral*, Warsaw, 1937.
[5] SARD, A. The Equivalence of n-measure and Lebesgue Measure in E_n, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 49 (1943), pp. 758-759.

(Reçu le 21 mars 1972)

Gerald Freilich
Queens College
City University of New York
Flushing, New York 11367