6. Arbre associé a une variété de dimension 1

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1972)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

6. Arbre associé a une variété de dimension 1

6.1 *Définition. Un point de branchement de X est un point de X non séparé d'un autre point de X.*

6.2 *Hypothèse. On suppose dans la suite que X est une variété topologique de dimension 1 à base dénombrable, simplement connexe et ordonnée, dont l'ensemble B des points de branchement est fini (et non vide)* [1].

Si B a n éléments le complémentaire $U = X - B$ est un ouvert séparé de X ayant $n + 1$ composantes connexes (toutes homéomorphes à $\mathbf{R}$). L'ordre sur X détermine alors un ordre sur l'ensemble de ces composantes connexes.

Dans ces conditions on peut associer à X un graphe ordonné, noté $\hat{X}$, de la façon suivante:

(i) l'ensemble des sommets de $\hat{X}$ est l'ensemble des composantes connexes de l'ouvert $U = X - B$;

(ii) il existe une arête (ordonnée) d'origine a et d'extrémité b si et seulement si

— $a < b$,

— $a \leqslant c \leqslant b$ entraîne $c = a$ ou $c = b$.

Il y a donc une correspondance biunivoque entre les arêtes de $\hat{X}$ et les points de branchements de X; et par conséquent $\hat{X}$ possède la propriété suivante:

(*P*) *pour toute arête α de $\hat{X}$ il existe une arête β de $\hat{X}$, $\beta \neq \alpha$, telle que α et β aient même origine ou même extrémité.*

6.3 *Proposition. Le graphe $\hat{X}$ est un arbre.*

En effet [2] le complémentaire d'un point de X a deux composantes connexes.

On dit alors que $\hat{X}$ est l'*arbre (ordonné) associé à la variété ordonnée X.*

---

[1]) Cette hypothèse est par exemple satisfaite pour les feuilletages du plan définis par des équations polynomiales.

6.4 *Exemples.* Arbres associés aux variétés ayant au plus 4 points de branchement:

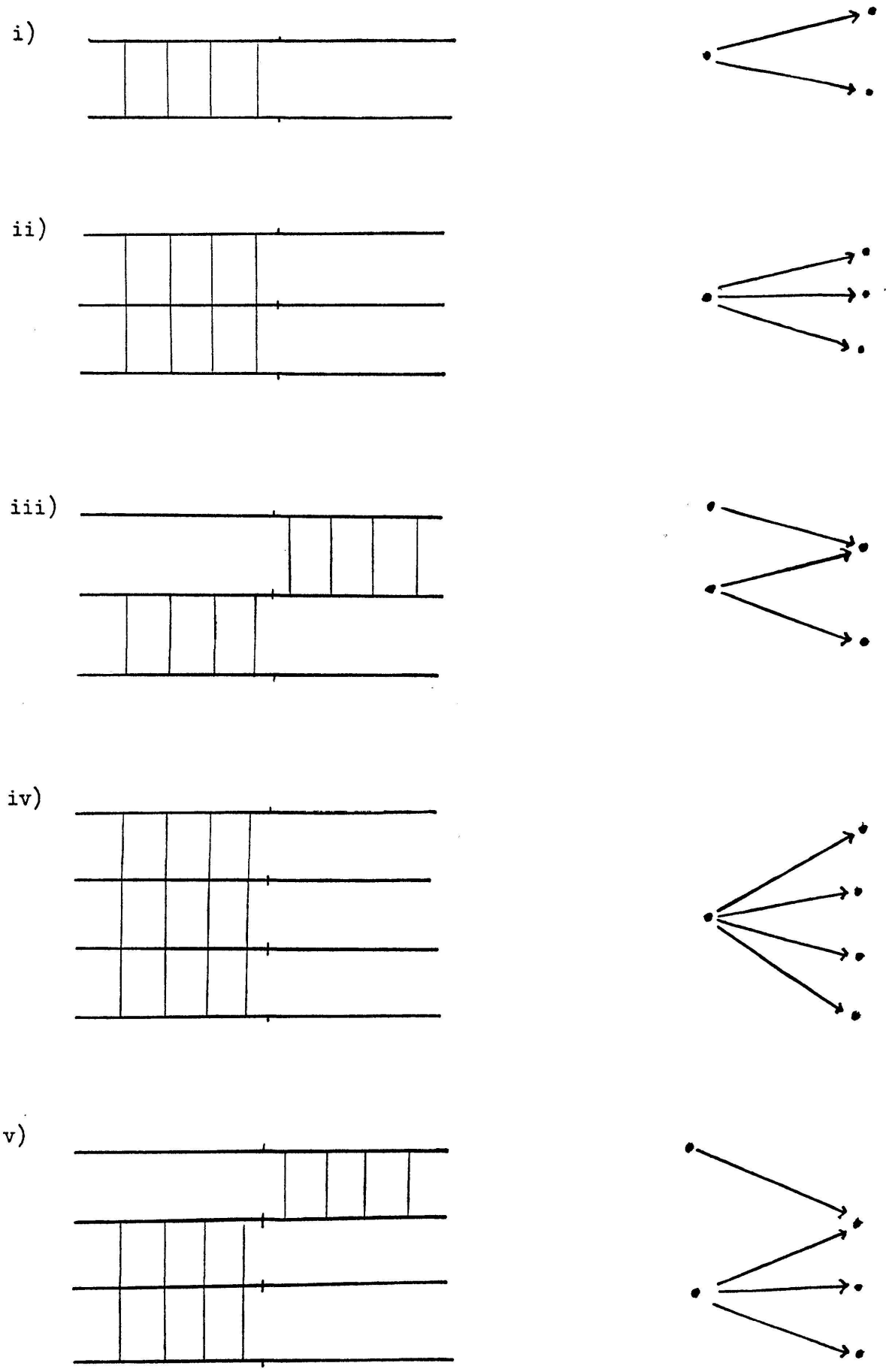

FIG. 2

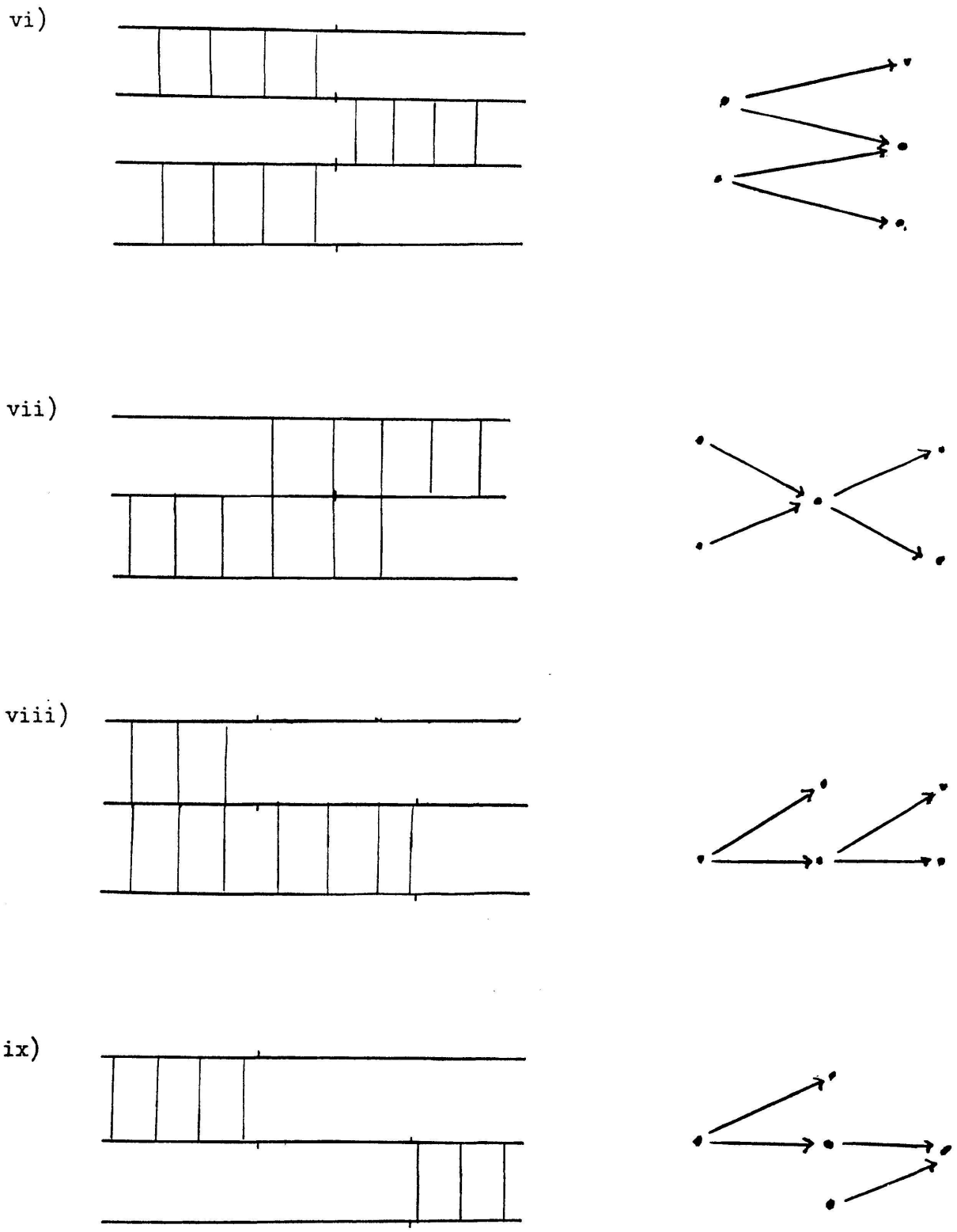

FIG. 2 *(suite)*

6.5 *Proposition. Soit Y une seconde variété ordonnée, et soit $\hat{Y}$ l'arbre ordonné associé à Y. Un homéomorphisme f de X sur Y détermine un isomorphisme $\hat{f}$ de $\hat{X}$ sur $\hat{Y}$. Si f est croissant (resp. décroissant) il en est de même de $\hat{f}$.*

En effet f transforme l'ensemble des points de branchement de X en l'ensemble des points de branchement de Y.

Inversement la donnée d'un arbre ordonné fini $\hat{A}$ vérifiant la propriété (P) détermine une variété de dimension 1 ordonnée A ayant un arbre associé isomorphe à $\hat{A}$ (on construit A par récurrence sur le nombre de sommets de $\hat{A}$ en commençant par en ôter un sommet extrémal).

Soit $\hat{B}$ un autre tel arbre, et soit B une variété de dimension 1 ayant $\hat{B}$ pour arbre associé. Un isomorphisme $\hat{g}$ de $\hat{A}$ sur $\hat{B}$ détermine (de façon non univoque) un homéomorphisme g de A sur B tel que $\hat{g}$ lui corresponde par la construction de 6.5.

Par conséquent:

6.6 THÉORÈME. *La classification des variétés topologiques de dimension* 1 *à base dénombrable, simplement connexes, ordonnées, ayant un nombre fini de points de branchement est équivalente à la classification des arbres ordonnés finis vérifiant la propriété* (P).

6.7 *Définition. Un point de branchement x de X est simple si l'ensemble B_x des points $y \neq x$ non séparés de x possède l'une des deux propriétés suivantes :*

a) *B_x est réduit à un seul point ;*

b) *B_x ne contient que deux points distincts qui sont eux-mêmes séparés.*

On dit alors que X est *simple* si tous ses points de branchement sont simples.

Dans ces conditions en chaque sommet non extrémal de l'arbre $\hat{X}$ associé à X la configuration est semblable à l'une des trois suivantes:

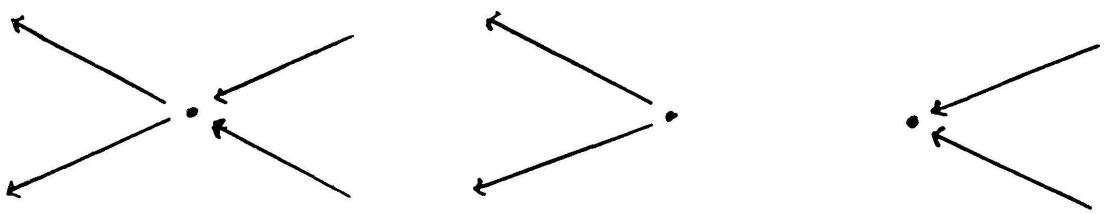

FIG. 3

En particulier les exemples ii), iv) et v) de 6.4 ne sont pas simples.