§3. Idéaux de polynômes.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1973)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

2.2. Concrètement, le théorème 3 signifie ceci: toute application $f: k^n \to k$, est une fonction polynomiale, et on peut supposer que le polynôme F tel que $F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ en tout point $\mathbf{x}$ de k^n est *réduit*; F est alors entièrement déterminé par f. Si on remarque que le polynôme $F_{\mathbf{a}}$ défini par (2.1.3) est réduit, on voit qu'on peut même écrire explicitement

$$F(X) = \sum_{\mathbf{a} \in k^n} f(\mathbf{a}) F_{\mathbf{a}}(X). \tag{2.2.4}$$

2.3. On a remarqué (sect. 1.1) que la dimension de l'espace vectoriel R est égale à q^n; comme $k[X] = R \oplus \Gamma$, l'espace quotient $k[X]/\Gamma$ est aussi de dimension q^n. Par ailleurs, l'espace vectoriel A, qui admet pour base sur k la famille $(f_{\mathbf{a}})_{\mathbf{a} \in k^n}$ (sect. 2.1), est également de dimension q^n. L'homomorphisme injectif (2.1.1) est donc en fait bijectif, ce qui donne une deuxième démonstration de la surjectivité de φ. Exercice pour le lecteur: donner une troisième démonstration de la surjectivité de φ en utilisant la théorie des polynômes d'interpolation.

2.4. Le théorème 3 permet d'évaluer la « probabilité » pour qu'une équation $F = 0$ ($F \in k[X]$) admette au moins une solution dans k^n. Tout d'abord, on ne modifie pas l'ensemble des solutions de l'équation en remplaçant F par F^*; on peut donc supposer F réduit, et on s'aperçoit ainsi qu'il existe essentiellement card $(R) = q^{q^n}$ équations distinctes. D'autre part, les polynômes réduits F tels que l'équation $F = 0$ *n'ait aucune solution* correspondent bijectivement par φ_R aux applications de k^n dans k^*; il y en a donc exactement $(q-1)^{q^n}$, et il existe ainsi $q^{q^n} - (q-1)^{q^n}$ polynômes réduits F tels que l'équation $F = 0$ *ait au moins une solution*. En définitive, la « probabilité » cherchée est donc égale à $1 - (1-q^{-1})^{q^n}$.

§ 3. *Idéaux de polynômes.*

3.1. Soit $F_1, \ldots, F_s$ une famille de s éléments de $k[X]$, et soit J l'idéal de $k[X]$ engendré par les F_j ($j = 1, \ldots, s$); considérons le système d'équations

$$F_1 = 0, \ldots, F_s = 0, \tag{3.1.1}$$

et soit V l'ensemble des solutions de (3.1.1) dans k^n, c'est-à-dire l'ensemble des zéros de J rationnels sur k. Soit enfin $I(V)$ l'ensemble des polynômes $G \in k[X]$ qui s'annulent en tout point de V; $I(V)$ est évidemment un idéal de $k[X]$; $I(V)$ contient J, et aussi Γ; $I(V)$ contient donc $J + \Gamma$; en fait:

THÉORÈME 4. — *On a l'égalité*

$$I(V) = J + \Gamma . \tag{3.1.2}$$

Démonstration. — Considérons le polynôme

$$F = 1 - (1 - F_1^{q-1}) \dots (1 - F_s^{q-1}) ; \tag{3.1.3}$$

F appartient à l'idéal J: en effet, considéré comme polynôme par rapport à $F_1, \dots, F_s$, le second membre de (3.1.3) ne contient pas de terme constant; d'autre part, F prend constamment la valeur 0 sur V, et la valeur 1 en dehors de V (voir chap. 1, sect. 1.1). Soit alors H un élément de $I(V)$, donc un polynôme nul sur V; il est clair que le polynôme $G = H - HF$ est identiquement nul, et appartient donc à Γ; il est clair également, puisque J est un idéal contenant F, que HF appartient à J; on voit ainsi que $H = HF + G$ appartient à $J + \Gamma$, donc que $I(V) \subset J + \Gamma$, C.Q.F.D.

3.2. Le *théorème de la base finie* de Hilbert (voir [**10**], p. 144) montre que tout idéal de $k[X]$ peut être engendré par un nombre fini de polynômes: le théorème 4 est donc en fait applicable à n'importe quel idéal J de $k[X]$ (dans le même ordre d'idées, on peut d'ailleurs remarquer que dans la démonstration du théorème 4, on a implicitement remplacé l'idéal J engendré par $F_1, \dots, F_s$, par l'idéal principal (F), contenu dans J, et dont l'ensemble des zéros dans k^n est le même que celui de J).

Notons d'autre part que le *théorème des zéros* de Hilbert ([**10**], p. 256, [**12**], p. 32, ou [**15**], p. 4) implique que, dans l'anneau $k[X]$, l'idéal $J + \Gamma = I(V)$ est égal à sa racine, c'est-à-dire à l'intersection des idéaux premiers qui le contiennent; comme $\dim(V) = 0$ (V est un ensemble fini de points rationnels sur k), ces idéaux premiers sont d'ailleurs tous maximaux, ce sont exactement les idéaux de la forme $\mathfrak{M}_{\mathbf{a}} = (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ parcourant l'ensemble V.

Notes sur le chapitre 2

§ **1** et **2**: les résultats contenus dans ces deux paragraphes sont essentiellement dus à Chevalley (1935); ils donneront notamment (chap. 3, sect. 1.1) une démonstration immédiate du « théorème de Chevalley-Warning ».

§ **3**: le théorème 3 est dû à Terjanian (1966).