Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 19 (1973)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉQUATIONS ET VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES SUR UN CORPS FINI
Autor: Joly, Jean-René
Kapitel: §2. Sommes de Gauss.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-46287

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

§ 2. *Sommes de Gauss.*

2.1. Soient χ un caractère multiplicatif et β un caractère additif de k.

DÉFINITION 1. — *On appelle* somme de Gauss *associée à χ et β la quantité*

$$\tau(\chi|\beta) = \sum_{x \in k^*} \chi(x)\beta(x). \tag{2.1.1}$$

Les valeurs prises par β et χ étant des racines p-ièmes de l'unité, et 0 ou des racines $(q-1)$-ièmes de l'unité, $\tau(\chi \mid \beta)$ est un entier du corps des racines $p(q-1)$-ièmes de l'unité.

Si le caractère β est fixé une fois pour toutes (par exemple, si $\beta(x) = \zeta^{Tr(x)}$, avec $\zeta = e^{2\pi i/p}$: sect. 1.2), on écrit $\tau(\chi)$ au lieu de $\tau(\chi \mid \beta)$, et (pour $y \in k$) $\tau_y(\chi)$ au lieu de $\tau(\chi \mid \beta_y)$ (sect. 1.2): on a donc

$$\tau_y(\chi) = \sum_{x \in k^*} \chi(x)\beta(xy). \tag{2.1.2}$$

2.2. Si l'un des caractères χ et β est trivial, la somme de Gauss associée est également « triviale » et sa valeur se calcule immédiatement à l'aide des relations d'orthogonalité (1.1.1) appliquées à χ ou à β:

(i) *si χ est trivial, mais non β, on a* $\tau(\chi \mid \beta) = -1$;

(ii) *si β est trivial, mais non χ, on a* $\tau(\chi \mid \beta) = 0$;

(iii) *enfin, si χ et β sont tous deux triviaux, on a* $\tau(\chi \mid \beta) = q - 1$.

2.3. Passons au cas non trivial. On suppose $\chi \neq \varepsilon$, on fixe une fois pour toutes un caractère additif non trivial β, et on met tous les caractères additifs non triviaux de k sous la forme β_y $(y \in k^*)$ (prop. 1); les sommes de Gauss non triviales associées à χ sont alors les $\tau_y(\chi)$ $(y \in k^*)$.

PROPOSITION 6. — *Si $\bar{\chi}$ désigne le caractère conjugué de χ (sect. 1.1), on a*

$$\tau_y(\chi) = \bar{\chi}(y)\tau(\chi). \tag{2.3.1}$$

Démonstration. — Puisque $y \neq 0$, l'application $x \mapsto xy$ est une permutation de k^*; il suffit alors d'écrire

$$\tau_y(\chi) = \sum_{x \in k^*} \chi^{-1}(y)\chi(xy)\beta(xy) = \bar{\chi}(y) \sum_{x \in k^*} \chi(xy)\beta(xy)$$

et de faire le changement de variable $z = xy$ pour obtenir (2.3.1).

PROPOSITION 7. — *On a (toujours pour $\chi \neq \varepsilon$)*

$$\tau(\chi)\tau(\bar{\chi}) = q\chi(-1). \tag{2.3.2}$$

Démonstration. — Par définition, $\tau(\chi)\tau(\bar{\chi}) = \sum_{x \in k^*} \sum_{y \in k^*} \chi(x)\bar{\chi}(y)\beta(x)\beta(y)$; mais $\chi(x)\bar{\chi}(y) = \chi(x)\chi^{-1}(y) = \chi(xy^{-1})$, et $\beta(x)\beta(y) = \beta(x+y)$. si on fait le changement de variables $(x, y) \mapsto (y, z)$ défini par $z = xy^{-1}$, on obtient donc

$$\tau(\chi)\tau(\bar{\chi}) = \sum_{y \in k^*} \sum_{z \in k^*} \chi(z)\beta(y(z+1)). \tag{2.3.3}$$

Le second membre se fractionne en deux sommes partielles correspondant respectivement à $z = -1$ et à $z \neq -1$; comme $\beta(0) = 1$, la première somme vaut $(q-1)\chi(-1)$; quant à la seconde, elle peut s'écrire

$$\sum_{z \neq -1} \chi(z) \sum_{y \in k^*} \beta(y(z+1));$$

mais la proposition 2, appliquée à $a = z + 1$, montre que pour tout $z \neq -1$, la somme portant sur $y \in k^*$ vaut $-\beta(0) = -1$; par ailleurs, (1.1.1), appliqué au groupe k^* et au caractère χ, donne

$$\sum_{z \neq -1} \chi(z) = -\chi(-1);$$

la deuxième somme partielle vaut donc $\chi(-1)$; si alors on reporte dans (2.3.3) les valeurs des deux sommes partielles, on obtient

$$\tau(\chi)\tau(\bar{\chi}) = (q-1)\chi(-1) + \chi(-1),$$

c'est-à-dire (2.3.2).

PROPOSITION 8. — *On a (en supposant toujours $\chi \neq \varepsilon$)*

$$|\tau(\chi)|^2 = q. \tag{2.3.4}$$

Démonstration. — Par définition, $|\tau(\chi)|^2 = \tau(\chi)\overline{\tau(\chi)}$; on peut donc écrire $|\tau(\chi)|^2 = \sum_{x \in k^*} \sum_{y \in k^*} \chi(x)\bar{\chi}(y)\beta(x)\beta(y)$; mais $\bar{\chi}(y) = \chi^{-1}(y) = \chi(y^{-1})$, et de même $\bar{\beta}(y) = \beta(-y)$; le terme général de la somme ci-dessus est alors égal à $\chi(xy^{-1})\beta(x-y)$, ou encore (en remplaçant y par $-y$, ce qui ne change pas la somme) à $\chi(-1)\chi(xy^{-1})\beta(x+y)$: la proposition 8 résulte donc de la proposition 7, et du fait que $\chi(-1)^2 = \chi((-1)^2) = \chi(1) = 1$.