3.2. Système d'optimalité

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **19 (1973)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

et où $v \in \mathcal{U}_{ad}$ avec:

(3.6) $\mathcal{U}_{ad}$ = ensemble convexe fermé non vide de $L^2(Q)$.

Remarque 3.1.

Il s'agit donc dans le problème précédent d'un *contrôle distribué.* (Cf. à ce sujet la Remarque 3.3. ci-après).

La *fonction coût est donnée par*:

$$J(v) = \int_Q |y(v) - z_d|^2 \, dx\, dt + N \int_Q v^2 \, dx\, dt, \tag{3.7}$$

où z_d est donnée dans $L^2(Q)$ et où N est donné > 0.

Le problème

$$\inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v) \tag{3.8}$$

admet une solution unique (vérification immédiate) pour laquelle nous allons écrire le « *système d'optimalité* ».

3.2. *Système d'optimalité*

Soit u la solution de (3.8). On pose $y(u) = y$ et l'on définit l'*état adjoint* p par [1]):

$$-\frac{\partial p}{\partial t} + A^* p = y - z_d, \tag{3.9}$$

$$p = 0 \text{ sur } \Sigma_+ = \Gamma_+ \times]0, T[, \tag{3.10}$$

$$p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega. \tag{3.11}$$

Le contrôle u est *caractérisé* par:

$$\int_Q (y - z_d)(y(v) - y)\, dx\, dt + N \int_Q u(v - u)\, dx\, dt \geqslant 0, \forall v \in \mathcal{U}_{ad}. \tag{3.12}$$

Mais on déduit facilement de (3.9), (3.10), (3.11) que:

$$\int_Q (y - z_d)(y(v) - y)\, dx\, dt = \int_Q p(v - u)\, dx\, dt$$

---

[1]) A^* est défini par $A^* \varphi = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i \varphi)$.

de sorte que (3.12) équivaut à:

(3.13) $$\int_Q (p+Nu)(v-u)\,dx\,dt \geqslant 0,\ \forall v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Introduisons:

(3.14) Π = opérateur de projection dans $L^2(Q)$ sur $\mathcal{U}_{ad}$.

Alors (3.13) équivaut à:

(3.15) $$u = \Pi\left(-\frac{p}{N}\right),$$

Par conséquent, *le contrôle optimal est donné par la résolution du système en* $\{y, p\}$:

(3.16) $$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial y}{\partial t} + Ay - \Pi\left(-\dfrac{p}{N}\right) = f, \\[2ex] -\dfrac{\partial p}{\partial t} + A^*p - y = -z_d, \\[2ex] y = 0 \text{ sur } \Sigma_-,\ p = 0 \text{ sur } \Sigma_+, \\[2ex] y(x, o) = y_0(x),\ p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega, \end{array}\right.$$

puis par (3.15).

Remarque 3.2.

Puisque le problème (3.16) *équivaut* au problème initial, le système *non linéaire* (3.16) *admet une solution unique.*

Remarque 3.3.

Supposons que le contrôle ne soit plus distribué mais de la forme:

(3.17) $$v(x, t) = \sum_{i=1}^{m} v_i(t)\, w_i(t)$$

où les fonctions w_i sont *données* dans $L^2(\Omega)$ (et en général dans les applications à support compact « assez petit »), les fonctions v_i étant les contrôles, assujettis aux contraintes:

(3.18) $v_i \in \mathcal{U}_{i,ad}$ = convexe fermé non vide de $L^2(0, T)$, $i = 1, \ldots, m$.

Supposons la fonction coût donnée alors par:

$$(3.19)\quad \left| \begin{array}{l} J(v) = \int_Q |y(v) - z_d|^2 \, dx\, dt + \sum_{i=1}^{m} N_i \int_0^T v^2 \, dt, \\ N_i > 0. \end{array} \right.$$

Soit $u = \{u_1, ..., u_m\}$ le contrôle optimal. Le système de l'optimalité est maintenant donné de la façon suivante: soit

$$(3.20)\quad \Pi_i = \text{opérateur de projection dans } L^2(0, T) \text{ sur } \mathscr{U}_{i,ad};$$

alors:

$$(3.21)\quad \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial y}{\partial t} + Ay - \sum_{i=1}^{m} \Pi_i \left(-\dfrac{p_i}{N_i} \right) w_i = f, \\ -\dfrac{\partial p}{\partial t} + A^* p - y = -z_d, \\ p_i(t) = \int_\Omega p(x, t)\, w_i(x)\, dx, \\ y = 0 \text{ sur } \Sigma_-, \; p = 0 \text{ sur } \Sigma_+, \\ y(x, o) = y_0(x), \; p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega, \end{array} \right.$$

et

$$(3.22)\quad u_i = \Pi_i \left(-\frac{p_i}{N_i} \right).$$

Nous ignorons dans quelle mesure on peut étendre à (3.21) les résultats de comparaison relatifs à (3.16) établis au n° 3.3. ci-après.

Remarque 3.4.

Si l'on prend *par exemple*:

$$(3.23)\quad \mathscr{U}_{ad} = \{v \mid v \geqslant 0 \text{ p.p. dans } Q\},$$

alors $\Pi(\varphi) = \varphi^+$ $(= \sup(\varphi, 0))$, de sorte que (3.16) devient dans ce cas:

$$(3.24)\qquad \left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial y}{\partial t} + Ay - \dfrac{p^-}{N} = f, \\[2ex] -\dfrac{\partial p}{\partial t} + A^*p - y = z_d, \\[2ex] y = 0 \text{ sur } \Sigma_- \,,\, p = 0 \text{ sur } \Sigma_+, \\[2ex] y(x, o) = y_0(x)\,,\, p(x, T) = 0 \text{ sur } \Omega. \end{array}\right.$$

On voit l'importance $\left(\text{puisque } u = \dfrac{p^-}{N}\right)$ de la « surface de commutation » séparant la région où $p > 0$ de celle où $p < 0$, le contrôle u étant *nul* dans la 1re région.

Remarque 3.5.

Pour une étude systématique des divers systèmes d'optimalité pour des équations d'état de natures variées et pour des contrôles distribués ou *frontière*, nous renvoyons à Lions [1] [2]. On fait en particulier usage, dans le cas des contrôles frontière, de la théorie des problèmes aux limites *non homogènes* telle qu'exposée dans Lions-Magenes [1].

3.3. *Propriétés de comparaison*

On suppose maintenant que $\mathcal{U}_{ad}$ est donné par:

$$(3.25)\qquad \left|\begin{array}{l} \mathcal{U}_{ad} = \{v \mid v \in L^2(Q)\,,\, \alpha(x, t) \leqslant v(x, t) \leqslant \beta(x, t) \text{ p.p.}, \\ \alpha \text{ et } \beta \text{ étant deux fonctions mesurables quelconques}\}. \end{array}\right.$$

On suppose dans (3.16) que z_d et N sont *fixés* [1]). On désigne par $\{y_i, p_i\}$ $(i = 1, 2)$ la solution de (3.24) correspondant à $f = f_i$, $y_0 = y_{0i}$. On a alors le:

THÉORÈME 3.1. *On suppose que* (3.25) *a lieu et que*

$$(3.26)\qquad f_1 \leqslant f_2\,,\, y_{01} \leqslant y_{02} \text{ p.p.}$$

---

[1]) On trouvera d'autres cas dans Lions [3].