1. SOME LINEAR ALGEBRA

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1974)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

SOME CLASSICAL THEOREMS ON DIVISION RINGS

by D. E. TAYLOR

The theorem of Wedderburn [15] that every finite division ring is a field, and the theorem of Frobenius [6] characterizing the quaternions as a non-commutative real division algebra can both be obtained as immediate and easy consequences of theorems on central simple algebras—particularly the Skolem-Noether theorem (van der Waerden [14, p. 199]). The purpose of this note is to use elementary linear algebra to prove a version of the Skolem-Noether theorem sufficient to yield the results of Wedderburn and Frobenius.

1. SOME LINEAR ALGEBRA

All the results of this section are quite elementary and can be found in most texts on linear algebra (for example: Hoffman and Kunze [9]).

Let V be a vector space over a field F and let T be a linear transformation of V. Suppose that $f(X)$ is a polynomial with coefficients in F such that $f(T) = \mathrm{O}$. If $f(X) = f_1(X) f_2(X)$ where $f_1(X)$ and $f_2(X)$ are coprime, then there are polynomials $g_1(X)$ and $g_2(X)$ such that $1 = f_1(X) g_1(X) + f_2(X) g_2(X)$. Then for each v in V the vector $v_1 = f_2(T) g_2(T) v$ belongs to the kernel, V_1, of $f_1(T)$, the vector $v_2 = f_1(T) g_1(T) v$ belongs to the kernel, V_2, of $f_2(T)$ and $v = v_1 + v_2$. Thus V is the (direct) sum of V_1 and V_2. Moreover, the restriction T_i of T to V_i satisfied the equation $f_i(T_i) = 0$ for $i = 1, 2$.

It follows by induction on the degree that if $f(X)$ can be factorized over F into distinct linear factors, then V is the direct sum of the eigenspaces of T. Note that V is not assumed to be finite dimensional.

Recall that the minimal polynomial of T is the monic polynomial $m(X)$ of least degree such that $m(T) = 0$. It is immediate that each eigenvalue λ of T satisfies the equation $m(\lambda) = 0$ and conversely, the above considerations show that each root of $m(X)$ is an eigenvalue of T.