3. Représentations modulaires des groupes finis ([3], [5])

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1974)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

3. Représentations modulaires des groupes finis ([3], [5])

Soient k un corps algébriquement clos et G un groupe fini. On sait que l'algèbre $k[G]$ du groupe G contient comme base sur k les éléments de G, le produit de deux tels éléments dans $k[G]$ étant le même que dans G. De plus, toute structure de $k[G]$-module sur un espace vectoriel V est déterminée par la donnée des automorphismes $v \mapsto g \cdot v$ de V, $g \in G$; elle équivaut par conséquent à la donnée d'un homomorphisme de groupes $G \to \mathrm{GL}(V)$, si $\mathrm{GL}(V)$ désigne comme d'habitude le groupe des automorphismes linéaires de V.

Lorsque k est de caractéristique 0, le théorème de Maschke nous dit que tout $k[G]$-module est une somme directe de $k[G]$-modules simples. Dans ce cas, les modules indécomposables coïncident donc avec les modules simples, c'est-à-dire les modules S n'ayant pas d'autres sous-modules que 0 ou S. La détermination explicite de ces modules simples peut soulever des difficultés considérables, mais que nous voulons taire ici ! Du point de vue de la classification des indécomposables, nous considérons notre problème comme résolu si nous pouvons le ramener au problème de la classification des modules simples.

Supposons donc k de caractéristique $p > 0$. On sait que tout groupe fini G d'ordre $n = p^a q$, avec q premier à p, contient des sous-groupes S d'ordre p^a et que tous ces sous-groupes sont conjugués entre eux; ce sont les sous-groupes de Sylow. Par exemple, si $G = \mathrm{GL}(m, \mathbf{F}_{p^s})$ est le groupe linéaire d'ordre m à coefficients dans le corps fini à p^s éléments, les matrices triangulaires (a_{ij}) telles que $a_{ii} = 1$ et $a_{ij} = 0$ pour $i > j$ forment un p-sous-groupe de Sylow de G.

Kasch, Kneser et Kupisch ont pu montrer en 1957 que le nombre des classes d'isomorphisme de $k[G]$-modules indécomposables est fini si et seulement si les p-sous-groupes de Sylow de G sont cycliques. Ce résultat est relativement facile. Mais on a dû attendre jusque 1969 pour une description précise des indécomposables dans le cas cyclique (Kupisch, Janusz). Dans le cas du groupe linéaire, cette description s'applique au cas $m = 2$ et $s = 1$.

Comme la description générale est assez ardue, nous ne voulons expliciter que le cas particulier où G contient seulement un p-sous-groupe de Sylow S, nécessairement normal dans G. Ceci a lieu par exemple lorsque G est le groupe des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ à coefficients dans $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Il y a alors un

complément K de S dans G, c'est-à-dire un sous-groupe tel que $S \cap K = \{1\}$ et $S \cdot K = G$. Si σ désigne un générateur de $S = \{1, \sigma, \sigma^2, \ldots, \sigma^{p^a-1}\} = \sigma^{\mathbf{Z}/p^a\mathbf{Z}}$, l'opération de K sur S par automorphismes intérieurs est donnée par une formule du type

$$x \sigma x^{-1} = \sigma^{\chi(x)} \text{ avec } x \in K \text{ et } \chi(x) \in \mathbf{Z} / p^a\mathbf{Z} .$$

L'opération induite de K sur $k[S]$ laisse stable le drapeau

$$k[S] \supset k[S](\sigma - 1) \supset k[S](\sigma - 1)^2 \ldots$$

d'où l'on déduit l'existence d'un élément $\pi \in k[S](\sigma - 1)$, congru à $\sigma - 1$ modulo $(\sigma - 1)^2$ et tel que

$$x \pi x^{-1} = \chi(x) \pi \text{ pour tout } x \in K$$

(choisir un supplémentaire de $k[S](\sigma - 1)^2$ dans $k[S](\sigma - 1)$ stable sous K).

Considérons maintenant l'ensemble $\mathscr{E}$ des classes d'isomorphisme de K-modules simples. Pour tout $e \in \mathscr{E}$ nous choisissons un module simple $E(e)$ dans la classe e et nous notons ${}_\chi E(e)$ le K-module ayant même espace sous-jacent que $E(e)$, la nouvelle opération $*$ de K étant reliée à l'ancienne au moyen de la formule

$$x * m = \chi(x) x \cdot m .$$

On obtient ainsi une opération $(n, e) \mapsto \chi^n \cdot e$ de $\mathbf{Z}$ sur $\mathscr{E}$ telle $E(\chi^n e) \xrightarrow{\sim} {}_\chi E(\chi^{n-1} e)$. Les orbites de $\mathbf{Z}$ dans $\mathscr{E}$ sont, comme nous allons le voir, reliées aux G-modules indécomposables.

Partons d'une orbite $e = \chi^r \cdot e, \chi \cdot e, \chi^2 \cdot e, \ldots, \chi^{r-1} \cdot e$ de $\mathbf{Z}$ dans $\mathscr{E}$ et d'une « couronne » de hauteur $\leqq p^a$ de r espaces vectoriels. Une telle couronne est par définition un diagramme d'espaces vectoriels de la forme

$$\begin{tikzcd}
 & V_0 \arrow[dr, "f"] & \\
V_{r-1} \arrow[ur, "f"] & & V_1 \arrow[d, "f"] \\
V_{r-2} \arrow[u, "f"] & & V_2 \arrow[dl, "f"] \\
 & \cdots\cdots\cdots \arrow[ul, "f"] &
\end{tikzcd}$$

avec $f^{p^a} = f \circ f \circ \ldots \circ f = 0$. A ces données nous associons un G-module d'espace sous-jacent

$$\bigoplus_{i=0}^{i=r-1} E(\chi^i e) \otimes_k V_i .$$

L'opération de K est induite par celles de K sur les modules simples $E(\chi^i e)$. L'opération de $\sigma \in S$ sur les différents facteurs $E(\chi^i e) \otimes_k V_i$ est déterminée si l'on connaît celle de π, qui est elle-même décrite par la figure ci-dessous

$$\begin{tikzcd}
 & E(e)\otimes V_0 \arrow[dr, "u\otimes f = \pi"] & \\
E(\chi^{r-1}e)\otimes V_{r-1} \arrow[ur, "\pi = u\otimes f"] & & E(\chi e)\otimes V_1 \arrow[d, "u\otimes f = \pi"] \\
E(\chi^{r-2}e)\otimes V_{r-2} \arrow[u, "\pi = u\otimes f"] & & E(\chi^2 e)\otimes V_2 \arrow[dl] \\
 & \cdots\cdots \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

où les $u : {}_\chi E(\chi^i e) \xrightarrow{\sim} E(\chi^{i+1} e)$ sont des K-isomorphismes choisis une fois pour toutes.

Le G-module ainsi construit est indécomposable si et seulement si notre couronne d'espaces vectoriels est indécomposable. Ceci a lieu s'il existe un $v \in V_i$ dont les itérés non nuls v, $f(v)$, $f^2(v)$, ... forment une base de $\bigoplus_{j=0}^{r-1} V_j$. On peut montrer qu'on obtient ainsi tous les G-modules indécomposables.

4. Espaces vectoriels munis de sous-espaces. ([4], [6])

Soit $\mathbf{O}$ un ensemble ordonné, Une k-représentation linéaire de $\mathbf{O}$ consiste en la donnée d'un k-espace vectoriel de dimension finie V et d'une famille de sous-espaces $(V(i))_{i \in \mathbf{O}}$ tels que $V(i) \subset V(j)$ si $i \leqq j$. La somme directe de deux représentations V' et V'' a pour espace sous-jacent $V' \oplus V''$ et est telle que

$$(V' \oplus V'')(i) = V'(i) \oplus V''(i)$$