Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 20 (1974)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROBLÈMES ACTUELS DE THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS
Autor: Gabriel, Pierre
Kapitel: 4. Espaces vectoriels munis de sous-espaces. ([4], [6])
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-46914

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 30.06.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

avec $f^{p^a} = f \circ f \circ \ldots \circ f = 0$. A ces données nous associons un G-module d'espace sous-jacent

$$\bigoplus_{i=0}^{i=r-1} E(\chi^i e) \otimes_k V_i .$$

L'opération de K est induite par celles de K sur les modules simples $E(\chi^i e)$. L'opération de $\sigma \in S$ sur les différents facteurs $E(\chi^i e) \otimes_k V_i$ est déterminée si l'on connaît celle de π, qui est elle-même décrite par la figure ci-dessous

$$\begin{tikzcd}
 & E(e)\otimes V_0 \arrow[dr, "u\otimes f = \pi"] & \\
E(\chi^{r-1}e)\otimes V_{r-1} \arrow[ur, "\pi = u\otimes f"] & & E(\chi e)\otimes V_1 \arrow[d, "u\otimes f = \pi"] \\
E(\chi^{r-2}e)\otimes V_{r-2} \arrow[u, "\pi = u\otimes f"] & & E(\chi^2 e)\otimes V_2 \arrow[dl] \\
 & \cdots\cdots \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

où les $u : {}_\chi E(\chi^i e) \xrightarrow{\sim} E(\chi^{i+1} e)$ sont des K-isomorphismes choisis une fois pour toutes.

Le G-module ainsi construit est indécomposable si et seulement si notre couronne d'espaces vectoriels est indécomposable. Ceci a lieu s'il existe un $v \in V_i$ dont les itérés non nuls v, $f(v)$, $f^2(v)$, ... forment une base de $\bigoplus_{j=0}^{r-1} V_j$. On peut montrer qu'on obtient ainsi tous les G-modules indécomposables.

4. Espaces vectoriels munis de sous-espaces. ([4], [6])

Soit $\mathbf{O}$ un ensemble ordonné, Une k-représentation linéaire de $\mathbf{O}$ consiste en la donnée d'un k-espace vectoriel de dimension finie V et d'une famille de sous-espaces $(V(i))_{i \in \mathbf{O}}$ tels que $V(i) \subset V(j)$ si $i \leqq j$. La somme directe de deux représentations V' et V'' a pour espace sous-jacent $V' \oplus V''$ et est telle que

$$(V' \oplus V'')(i) = V'(i) \oplus V''(i)$$

pour tout i. Nous nous intéressons ici aux représentations indécomposables, c'est-à-dire aux représentations non nulles qui ne sont pas somme directe de 2 sous-représentations non nulles.

Kleiner, Nazarova et Roiter ont pu montrer que le nombre de classes d'isomorphisme de représentations indécomposables était infini si et seulement si **O** contenait un sous-ensemble ordonné plein (c'est-à-dire muni de l'ordre induit) de l'un des types suivants:

$\{1, 2, 3, 4\}$ (4 points incomparables deux à deux)

$\{1 < 2, 3 < 4, 5 < 6\}$ (3 couples incomparables d'éléments comparables)

$\{1 < 2 < 3, 4 < 5 < 6, 7\}$

$\{1 < 2 < 3 < 4 < 5, 6 < 7, 8\}$

$\{1 < 2 < 3 < 4, 5 < 6 > 7 < 8\}$.

Cet énoncé joue un rôle essentiel dans leur démonstration des conjectures de Brauer-Thrall, dont nous allons donner le principe.

5. Le conjecture-théorème de Brauer/Thrall-Nazarova/Roiter ([7]).

Soit A une algèbre de dimension finie sur un corps algébriquement clos k. Pour tout entier naturel n, nous posons $v_A(n)$ = nombre de classes d'isomorphisme de A-modules indécomposables de k-dimension n. La conjecture de Brauer-Thrall dit que, *si* $\sum_{n \in \mathbf{N}} v_A(n)$ *est infini, il y a une infinité de* n *tels que* $v_A(n) = \infty$. En 1968 Roiter a pu fournir un premier élément de réponse à cette conjecture en montrant de manière simple et élégante que si $\sum_{n \in \mathbf{N}} v_A(n)$ est infini, il y a une infinité de n tels que $v_A(n) \neq 0$. Une démonstration complète de la conjecture de Brauer-Thrall n'a été publiée qu'en 1974 par Nazarova et Roiter. La démonstration reste technique et épineuse. Nous en développons seulement le principe:

Raisonnant par récurrence sur la dimension de A, nous pouvons supposer que $\sum_n v_B(n) < \infty$ pour tout vrai quotient B de A, et que $v_A(n) < \infty$ pour presque tout n. Il s'agit alors de montrer que $\sum_n v_A(n) < \infty$.