**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
**Band:** 20 (1974)
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LE PROBLÈME DE KUMMER
**Autor:** Moreno, Carlos Julio
**Kapitel:** § 1. Introduction
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-46894

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 12.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

# SUR LE PROBLÈME DE KUMMER

par Carlos Julio MORENO

## § 1. INTRODUCTION

Soit $p$ un nombre premier de la forme $p = 1 + 3t$ et $g$ un générateur du groupe multiplicatif $(Z/pZ)^*$. Soit encore $\chi$ le caractère cubique non principal défini par le symbole

$$\chi(k) = \rho^{Indg(k)},$$

où $\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ et $k = g^{Indg}$ dans $(Z/pZ)^*$. La somme de Gauss pour le caractère $\chi$ est donnée par la formule

$$\tau_p = \sum_{k=1}^{p-1} \chi(k) e^{\frac{2\pi ik}{p}}. \tag{1}$$

On connaît deux résultats classiques sur la valeur du module de la somme de Gauss ([7] § 20)

A) $$|\tau_p| = p^{\frac{1}{2}}$$

B) $$\tau_p = p^{\frac{1}{2}} e^{i\theta_p},$$

où les angles $\theta_p$ sont bien définis à conjugaison près.

Kummer ([12], [13]) a calculé la valeur numérique de $\tau_p$ pour tous les nombres premiers $p \leq 499$ et a fait l'observation suivante (en utilisant une notation moderne):

*Conjecture de Kummer*

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv 1 \ (mod\ 3)}} \chi_h(\theta_p) = \frac{W_h x}{2\log x} + o\left(\frac{x}{\log x}\right), \quad h = 1, 2, 3,$$

où $\chi_1$ (resp. $\chi_2, \chi_3$) est la fonction caractéristique de l'intervalle $(0, \frac{\pi}{3}]$ (resp. $(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$, $(\frac{2\pi}{3}, \pi]$), et

$$W_h = \begin{cases} \frac{1}{2}, & h = 1 \\ \frac{1}{3}, & h = 2 \\ \frac{1}{6}, & h = 3. \end{cases}$$

Un grand nombre des nouveaux calculs par Goldstine et von Neumann [6], Lehmer [15], et Cassels [1] nous ont conduits à douter de la véracité de la conjecture de Kummer; les mêmes calculs semblent aussi indiquer que les angles $\theta_p$ sont équirépartis dans l'intervalle $(0, \pi)$ pour la mesure de Lebesgue. Le but de cette note est de donner une démonstration du résultat suivant.

*Théorème. Soit $\chi_I$ la fonction caractérisitique d'un sous-intervalle $I$ de $(0, \pi]$, alors*

$$\sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv 1 \, (mod\, 3)}} \chi_I(3\theta_p) = \frac{|I|\, x}{2 \log x} + o\left(\frac{x}{\log x}\right),$$

*où $|I|$ est la mesure de Lebesgue de $I$.*

*Remarque.* Le Théorème a été énoncé comme une loi de distribution des nombres premiers mais on peut dire simplement que les angles de la troisième puissance de $\tau_p$ sont équirépartis dans l'intervalle $(0, \pi]$ pour la mesure de Lebesgue.

## § 2. Démonstration du théorème

L'idée de la démonstration a été déjà considérée par Davenport-Hasse [4] et aussi par Weil [21]. Elle consiste à interpréter les sommes de Gauss comme des traces d'opérateurs de Frobenius.

Soit $E = Q(\rho)$ le corps quadratique imaginaire obtenu en adjoignant $\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ à $Q$ et $J_E$ son anneau d'entiers. L'arithmétique de $J_E$ est bien connue et on sait que les nombres premiers dans $J_E$ appartiennent a deux classes selon que la norme est un nombre premier rationnel ou le carré d'un nombre premier rationnel. Dans ce paragraphe, nous décrirons une construction locale des sommes de Gauss. Soit $\mathfrak{q}$ un nombre premier de $J_E$, $F\mathfrak{q}$ son corps résiduel et $N_{E/Q}(\mathfrak{q}) = q$ l'ordre de $F\mathfrak{q}$. Il est très facile de voir que $q \equiv 1 \pmod 3$, ce qui permet de construire un caractère cubique multipli-