$$\left| \sum_{x=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i x^3}{p}} \right| \geqq (1-\varepsilon) p^{\frac{1}{2}} .$$

On doit observer simplement que

$$\sum_{x=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i x^3}{p}} = \tau_p + \bar{\tau}_p = 2 p^{\frac{1}{2}} \cos \theta_p .$$

Cette idée remonte à Hasse [7] (§ 10.8, p. 171) qui l'avait déjà employée dans le cas de la somme de Gauss

$$\sum_{x=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi i x^4}{p}}, \quad p \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 4) .$$

5. La solution complète du problème de Kummer sera immédiate si on peut établir que les deux fonctions zêta définies par le produit d'Euler

$$L_v(s) = \prod_{\substack{p \\ p \equiv 1\ (mod\ 3)}} (1 + \tau_p^v p^{-s})^{-1} (1 + \bar{\tau}_p^v p^{-s})^{-1} , \quad v = 1, 2$$

sont des fonctions holomorphes pour $Re(s) \geqq \frac{3}{2} - \varepsilon$ et $Re(s) \geqq 2 - \varepsilon$ resp. et ne s'annulent pas sur la droite de convergence absolue. Il serait aussi très intéressant de donner une interprétation de caractère 1-adique d'un élément de Frobenius d'expression $\tau_p + \bar{\tau}_p$.

Kubota [10], [11] a obtenu des résultats très profonds pour des fonctions analogues à $L_1(s)$ et $L_2(s)$ et nous espérons que sa méthode pourrait s'appliquer à notre problème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Cassels, J. N. S. On kummer sums. *Proc. London Math. Soc.* (3) *21* (1970), 19-27.
[2] Chowla, S. *The Riemann Hypothesis and Hilbert's Tenth Problem.* Gordon and Bleach, New York, 1965.
[3] Davenport, H. *Multiplicative number Theory.* Markham, Chicago, 1967.
[4] —— und H. Hasse. Die Nullstellen der Kongruenzzetafunktionen im gewissen zyklischen Fällen. *J. reine angew. Math*, *172* (1935), 151-182.
[5] Deuring, M. Die Zetafunktion einer algebraischen Kurve von Geschlechte Eins. I, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen*, (1953),85-94.
[6] Goldstine, H. and J. von Neumann. A numerical study of a conjecture of Kummer. *Math. Tables Aids Comput.* *7* (1953), 133-134.
[7] Hasse, H. *Vorlesungen über Zahlentheorie.* 1te Aufgabe, Springer, Berlin, 1964.
[8] Hecke, E. Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen. I, II, *Math. Zeitschr.*, *1* (1918), 357-376; *6* (1920), 11-51.
[9] Hilbert, D. Die Theorie der algebraischen Zalkörper. *Jahresbericht D. Math. Ver. Bd. 4* (1897), 175-546.

[10] KUBOTA, T. On a special kind of Dirichlet series. *Journ. Math. Soc. Japan, 20,* (1968), 193-207.

[11] —— Some results concerning reciprocity law and real automorphic functions. *Proceedings of Symposia in Pure Math. Vol. XX* (1971), 328-394.

[12] KUMMER, E. Eine Aufgabe betreffend die Theorie der kubischen Reste. *J. reine angew. Math. 23* (1842), 285-86.

[13] —— De residuis cubicis disquisitiones nonnulae analyticae, *J. reine angew. Math. 32* (1846), 341-59.

[14] LANG, S. *Algebraic Numbers.* Addison-Wesley, New York, 1964.

[15] LEHMER, E. On the location of Gauss sums. *Math. Tables Aids Comput. 10* (1956), 194-202.

[16] MORENO, C. Kummer sums and elliptic curves. *(à paraître).*

[17] SERRE, J.-P. *Abelian l-adic representations and elliptic curves.* Benjamin, New York, 1968.

[18] SHIMURA, G. and Y. TANIYAMA. Complex multiplication of abelian varieties and its applications to number theory. *Publ. Math. Soc. Japan, n° 6,* 1971.

[19] WEIL, A. Number of solutions of equations in finite fields. *Bull. Amer. Math. Soc. 55* (1949), 497-508.

[20] —— Jacobi sums as "Grössencharactere". *Trans. Amer. Math. Soc. 73* (1952), 487-495.

[21] —— On some exponential sums. *Proc. Nat. Acad. Sc. USA, t. 34* (1948), 204-207.

[22] WEYL, H. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, *Math. Annalen 77* (1914), 313-352.

(Recu le 29 mai 1973)

Carlos Julio Moreno
The Center for Advanced Study
University of Illinois
912 West Illinois
Urbana, IL 61801
U.S.A.

vide-leer-empty