Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 20 (1974)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PETITE ENFANCE DE LA TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE
Autor: Pont, Jean-Claude
Kapitel: §2. — Les ponts de Koenigsberg
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-46897

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 03.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

des fonctions continues. Or, à nul endroit la fonction continue n'est davantage chez elle qu'en analyse. De là à concevoir une étroite corrélation entre ces deux disciplines, il n'y a qu'un petit pas, allègrement franchi par les mathématiciens du XXe siècle. Prenant pour réflexion la fonction continue, qu'elle rapporte aux concepts de voisinages ouverts et fermés, la topologie générale prend rapidement ses distances à l'égard du modèle que lui fournit l'espace euclidien, pour s'élever à un haut degré de généralité en raisonnant sur des ensembles quelconques, dont des parties convenablement choisies sont considérées a priori comme des ensembles ouverts. La fonction continue se définit *ipso facto* et avec elle apparaît le problème de la caractérisation topologique de ces ensembles. Ce point de vue s'est développé à partir des notions d'espace métrique (M. Fréchet, 1906) et d'espace topologique (F. Hausdorff, 1914). Vers 1925, les deux topologies, aux traits pourtant si fortement marqués, aux méthodes si nettement différentiées dans la première période, tendent à se confondre à la suite des travaux de Brouwer, Lefschetz, Alexandroff, Hopf et tant d'autres [1].

L'origine de la topologie et les travaux de Poincaré sont les limites naturelles de cette histoire. Avec les recherches du grand savant français — qui écrit à lui seul à peu près autant de pages sur la topologie que tous les auteurs rencontrés dans notre histoire — *l'analysis situs* gagne en effet ses lettres de noblesse, et devient une discipline autonome des mathématiques.

§ 2. — Les ponts de Koenigsberg

L'histoire de la topologie commence peut-être en 1736, quand Euler reconnaît un aspect particulier dans un problème que rien, de prime abord, ne distingue de ses homologues de la géométrie élémentaire. Il s'agit du problème des ponts de Koenisgberg qu'Euler pose en ces termes: « A Koenigsberg, en Prusse, il y a une île A appelée le Kneiphof, entourée d'un fleuve qui se partage en deux bras, comme on peut le voir sur la

---

[1] On trouvera des précisions sur la genèse de la topologie ensembliste jusqu'aux travaux de Hausdorff dans le livre de J. H. Manheim, *The genesis of point set topology*, Pergamon Press, New-York 1964.

Pour quelques développements plus récents, voir H. Hopf, Ein Abschnitt aus der Entwicklung der Topologie, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, pp. 182-192. Bd. 6, 1966.

S. Lefschetz, The early development of algebraic topology, *Boletin da sociedade Brasiliera de matematica*, pp. 1-48, 1970.

J. Bollinger, Geschichtliche Entwicklung des Homologiebegriffes, *Archive for history of science*, Vol. 9, number 2, 1972, pp. 94-166,

figure 1, mais les bras de ce fleuve sont garnis de sept ponts a, b, c, d, e, f, g, et l'on proposait cette question sur ces ponts: une personne peut-elle s'arranger de manière à passer une fois sur chaque pont, mais une fois seulement ? Les uns affirmaient que cela était possible; d'autres niaient; mais personne ne pouvait prouver. Quant à moi, j'ai fait de ce problème le suivant beaucoup plus général: quelle que soit la figure du fleuve et sa distribution en bras, et quel que soit aussi le nombre de ponts, trouver si une personne peut traverser le fleuve en passant une seule fois sur chaque pont.»

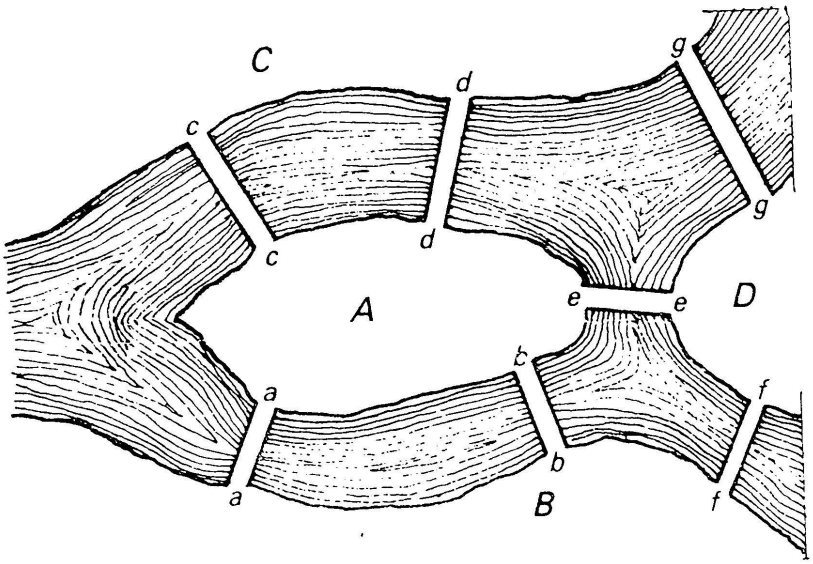

Fig. 1

L'important ici n'est pas tant la solution d'Euler, pas plus que la méthode qu'il utilise, mais le commentaire qui accompagne ce problème: « Outre cette partie de la géométrie qui traite des grandeurs et qui a été de tout temps cultivée avec beaucoup de zèle, il en est une autre, jusqu'à nos jours complètement inconnue, dont Leibniz a fait le premier mention et qu'il appela géométrie de position. D'après lui, cette partie de la géométrie s'occupe de déterminer seulement la position et de chercher les propriétés qui résultent de cette position; dans ce travail, il n'est besoin ni d'avoir égard aux grandeurs elles-mêmes, ni de les calculer; mais il n'est pas encore assez bien établi quels sont les problèmes de ce genre appartenant à la géométrie de position, et quelle méthode il faut employer pour les résoudre; c'est pourquoi lorsque récemment il fut question d'un problème qui semblait, à la vérité, se rattacher à la géométrie ordinaire, mais dont cependant la solution ne dépendant, ni de la détermination de grandeurs, ni du calcul de quantités, je n'ai point balancé à le rapporter à la géométrie de position, d'autant plus que les considérations de position entrent seules dans la

solution, tandis que le calcul n'y est pour rien. J'ai donc cru utile d'exposer ici, comme un exemple de géométrie de position, la méthode que j'ai trouvée pour résoudre les problèmes de ce genre.»

Avant de poursuivre, remarquons ceci. D'une façon schématique, on peut répartir les découvertes mathématiques en deux classes:

— Il y a pour commencer celles qui sont autant d'une époque que d'un homme, celles qui s'inscrivent naturellement dans le continuum de la pensée, en bref, celles qui n'auraient pas pu ne pas être. « Lorsqu'il a neigé tout l'hiver durant, la patte d'un lièvre suffit à déclencher l'avalanche.»

— Et puis, il y a les découvertes qui sont accidentelles, qui ne s'inscrivent pas dans le cadre d'un temps, qui font bande à part.

Le problème des ponts, qui est peut-être l'acte de naissance de la topologie, appartient à cette deuxième classe: il n'eut guère d'influence sur le développement de la topologie. Il devait en aller autrement du théorème d'Euler sur les polyèdres.

§ 3. — Le théorème d'Euler sur les polyèdres

3.1 Euler: Lorsqu'on se propose de désigner les lignes polygonales du plan, il faut se rappeler le nombre des côtés qui la limitent. Vers 1750, Euler recherche une classification analogue pour les polyèdres; il remarque que le nombre des sommets peut à ce point différer du nombre des faces, qu'il faut les indiquer tous deux (tétraèdre hexagone, pentaèdre hexagone, etc.). Cette classification n'est pas non plus satisfaisante, et se présente alors naturellement l'idée de faire appel au troisième nombre caractéristique: le nombre des arêtes. Cependant, comme le montre l'examen de quelques cas, ce nombre est déterminé par les deux autres. De cette dernière constatation découle ce qu'il est convenu d'appeler le théorème d'Euler pour les polyèdres, publié en 1752: dans tout polyèdre $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2$ (où α_0, α_1, α_2 représentent respectivement le nombre de sommets, d'arêtes et de faces) [1]).

L'importance de ce théorème pour notre sujet apparaît clairement si l'on songe que l'histoire de la topologie, jusqu'en 1851, se confond, à de rares exceptions près, avec l'histoire du dit théorème. Aussi doit-on s'y arrêter quelque peu.

---

[1] On accorde parfois à Descartes la paternité de ce théorème; j'ai examiné, dans l'ouvrage cité à la page 1, (pp. 8-13) ce qu'il faut penser de cette opinion.