2. Nous utiliserons les lemmes suivants:

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1974)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

FORMES-VOLUME SUR LES VARIÉTÉS A BORD

par Augustin BANYAGA

1. Introduction

Soit M une variété différentiable. Une famille à 1-paramètre de formes-volume τ_t est la donnée pour tout $t \in [0, 1]$, d'une forme différentielle de degré maximum, partout non nulle, C^∞, et variant différentiablement avec t.

Moser [1] a démontré qui si τ_t est une famille à 1-paramètre de formes-volume sur une variété différentiable M connexe et compacte sans bord, la condition $\int_M \tau_t = \int_M \tau_0$, pour tout t, entraînait l'existence d'une isotopie Φ_t de M telle que $\Phi_t^* \tau_t = \tau_0$.

Nous donnons ici une généralisation de ce théorème aux variétés compactes, connexes, à bord, par une méthode qui évite l'emploi des formes harmoniques. Notre résultat s'énoncera ainsi:

THÉORÈME. Soit M une variété différentiable orientable, à bord ∂M, compacte et connexe de dimension n, τ_t une famille à 1-paramètre de formes-volume. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) $\int_M \tau_t = \int_M \tau_0$, pour tout t

(ii) Il existe une famille à 1-paramètre de $(n-1)$-formes α_t telles que $\partial \tau_t / \partial t = d\alpha_t$ et $\alpha_t(x) = 0$ pour tout $x \in \partial M$.

(iii) Il existe une isotopie Φ_t de M telle que

$$\Phi_t^* \tau_t = \tau_o, \Phi_o = \mathrm{id} \text{ et } \Phi_t \mid \partial M = \mathrm{id}.$$

2. Nous utiliserons les lemmes suivants:

Lemme 1. Il existe un atlas $(U_i, \varphi_i)_{i=o,\dots,m}$, $m < \infty$, de M où tous les U_i sont des ouverts non vides de M tels que $U_0 \subset \bigcap_{i=1}^{m} U_i$ et $U_0 \cap \partial M = \phi$, les φ_i étant des difféomorphismes préservant l'orientation de U_i sur $\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{R}^n_+ = \{x = (x_1 \dots x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_1 \geqslant 0\}$.

Démonstration. Le lemme est trivial pour $n = 1$. Supposons $n > 1$. Soit $x_0 \in M \setminus \partial M$ et $y \in M$. Soit ψ une carte locale en y, c'est-à-dire un difféomorphisme d'un voisinage V_y de y sur $\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{R}^n_+$. Soit x_1 un point de V_y différent de y et pris hors du bord. On choisit un chemin différentiable $c(t)$, évitant y et le bord et reliant x_0 à x_1 c'est-à-dire tel que $c(0) = x_0$ et $c(1) = x_1$. Ceci est possible en dimension > 1 par connexité.

D'après le théorème d'extension des isotopies (voir Palais [4]), il existe une isotopie H_t de M telle que

$$H_t(y) = y, H_t(x_1) = c(t), \text{ pour tout } t.$$

Posons $U_y = H_0(V_y)$; c'est un ouvert contenant x_0 et y. Soit φ_y la carte de source U_y définie par $\varphi_y = \psi_0 H_0^{-1}$. Comme M est compact on peut extraire du recouvrement $\{U_y\}_{y \in M}$ un recouvrement fini $U_1, \ldots, U_m$; soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ les cartes correspondantes. Comme $x_0 \in U_1$ pour tout i, $\bigcap_{i=1}^{m} U_i = U_0 \neq \phi$. On diminue éventuellement U_0 pour que $U_0 \cap \partial M = \phi$ et qu'il existe une carte φ_0 de U_0 sur $\mathbf{R}^n$.

Désignons par $\wedge_c^p(\mathbf{R}^n)$, (respectivement $\wedge_c^p(\mathbf{R}^n_+)$) l'espace des p-formes de classe C^∞, à support compact dans $\mathbf{R}^n$ (respectivement dans $\mathbf{R}^n_+$)) . On le munit de la topologie suivante: on dira qu'une suite de formes $\{\varphi_\nu\}_{\nu \in \mathbf{N}}$, de coefficients $\varphi_\nu^{i_1 \cdots i_p}$, tend vers 0 dans $\wedge_c^p(\mathbf{R}^n)$ (ou $\wedge_c^p(\mathbf{R}^n_+)$) si et seulement si leurs supports restent dans un compact fixe K et pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ lessuites $D^\alpha \varphi_\nu^{i_1 \cdots i_p}$ tendent uniformément vers 0 quand $\nu \to \infty$.

Le bord $\partial \mathbf{R}^n_+$ de $\mathbf{R}^n_+$ est le sous-espace $\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_1 = 0\}$, et l'intérieur de $\mathbf{R}^n_+$ est $\mathbf{R}^n_+ \setminus \partial \mathbf{R}^n_+$.

Lemme 2. Pour toute forme $\omega \in \wedge_c^n(\mathbf{R}^n_+)$, à support dans l'intérieur de $\mathbf{R}^n_+$ et telle que $\int \omega = 1$, il existe un opérateur

$$I_n^\omega : \wedge_c^n(\mathbf{R}^n) \to \wedge_c^{n-1}(\mathbf{R}^n) \left(\text{resp. } I_n^\omega : \wedge_c^n(\mathbf{R}^n_+) \to \wedge_c^{n-1}(\mathbf{R}^n_+)\right)$$

linéaire et continu au sens de la topologie mentionnée plus haut et tel que l'on ait

1) $d I_n^\omega(\alpha) = \alpha - \omega \int \alpha, \ \forall \alpha \in \wedge_c^n(\mathbf{R}^n)$,
2) $(I_n^\omega(\alpha))(x) = 0, \forall x \in \partial \mathbf{R}^n_+$.

Remarques

1) Dans la suite I_n^ω sera désigné par I_n seulement.
2) Ce lemme est une modification d'un lemme de de Rham [3].

Démonstration.

1. Cas de $\wedge_c^n(\mathbf{R}^n)$. On construit I_n par récurrence en convenant que $I_0 = 0$ et en choisissant une forme particulière

$$\bar{\omega} = a(x_1)\, a(x_2) \ldots a(x_n)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

où $a(t)$ est une fonction quelconque, de classe C^∞, positive ou nulle, à support dans l'intervalle [1, 2] et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} a(t)dt = 1$. Il est clair que $\int \bar{\omega} = 1$.

Désignons par d' l'application de $\wedge^r(\mathbf{R}^n)$ dans $\wedge^{r+1}(\mathbf{R}^n)$ définie par $d' = \sum_{i=1}^{n-1} d\,x_i \wedge \partial/\partial\, x_i$. On a $d = d' + d\,x_n \wedge \partial/\partial\, x_n$,

$$\bar{\omega} = \omega' \wedge a(x_n)\, d\,x_n\,,$$

avec $$\omega' = a(x_1) \ldots a(x_{n-1})\, d\,x_1 \wedge \ldots \wedge d\,x_{n-1}$$

et toute forme $\alpha \in \wedge^n(\mathbf{R}^n)$ s'écrira $\alpha = \alpha_1(x_n) \wedge d\,x_n$ où $\alpha_1(x_n)$ est une $(n-1)$-forme dans $\mathbf{R}^{n-1}$ (x_n étant pris comme paramètre). Suivant [3], on pose

$$\bar{I}_n(\alpha) = \bar{I}_{n-1}(\alpha_1) \wedge d\,x_n + (-1)^{n-1}\, \omega' \{\int_{-\infty}^{x_n} (\int a_1(t) - a(t) \int \alpha)\, d\,t\}\,.$$

C'est bien un opérateur linéaire et continu. La propriété annoncée se vérifie par un calcul direct.

$$d\,\bar{I}_n\,\alpha = d\,(\bar{I}_{n-1}(\alpha_1) \wedge dx_n) + (-1)^{n-1}\, d\,(\omega' \{\int \ldots\})\,,$$

$$\begin{aligned} d\,(\bar{I}_{n-1}(\alpha_1) \wedge dx_n) &= \left(d' + dx_n \wedge \frac{\partial}{\partial x_n}\right)(\bar{I}_{n-1}(\alpha_1) \wedge dx_n) \\ &= d'(I_{n-1}(\alpha_1)) \wedge d\,x_n \\ &= (\alpha_1 - \omega' \int \alpha_1) \wedge d\,x_n, \text{ par hypothèse de récurrence,} \\ &= \alpha - (\omega' \wedge dx_n) \int \alpha_1\,. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\left(d' + dx_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)(\omega'\{\ldots\}) = d\,x_n \wedge \omega' \frac{\partial}{\partial x_n}\{\int \ldots\}$$

$$= ((-1)^{n-1}\omega' \wedge dx_n)(\int \alpha_1(x_n) - a(x_n) \int \alpha)$$

$$= (-1)^{n-1}\, \omega' \wedge d\,x_n(\int \alpha_1(x_n)) - (-1)^{n-1}\, \omega' \wedge a(x_n)\, d\,x_n(\int \alpha)\,,$$

de sorte que $d\,\bar{I}_n(\alpha) = \alpha - \bar{\omega} \int \alpha$.

Soit maintenant une autre n-forme ω à support compact dans $\mathbf{R}_+^n$ et telle que $\int \omega = 1$; on définit $I_n(\alpha) = \bar{I}_n(\alpha) - \bar{I}_n(\omega) \int \alpha$ et on a $d\,I_n(\alpha) = \alpha - \omega \int \alpha$.

2. Cas de $\wedge_c^n(\mathbf{R}_+^n)$. On définit I_0 en convenant que $I_0 = 0$. Définissons $\bar{I}_1$. Soit $\alpha = g(x)\,dx$ où g est à support dans $\mathbf{R}_+^n$ et soit $b(x)$ une fonction C^∞, positive ou nulle, à support dans l'intervalle $[1, 2]$ et telle que $\int_0^\infty b(t)\,dt = 1$.

On pose $\bar{\omega} = b(x)\,dx$ et

$$\bar{I}_1(\alpha) = \int_0^x \left(g(t) - b(t) \int \alpha\right) dt\,.$$

On a bien

$$d\bar{I}_1(\alpha) = \alpha - \bar{\omega} \int \alpha\,.$$

Pour $n > 1$, on définit $\bar{I}_n$ par récurrence en posant

$$\bar{I}_n(\alpha) = \bar{I}_{n-1}(\alpha_1) \wedge dx_n + (-1)^{n-1}\,\omega' \left\{\int_{-\infty}^{x_n} \left(\int_{\mathbf{R}^{n-1}} \alpha_1(t) - b(t) \int_{\mathbf{R}_+^n} \alpha\right) dt\right\}$$

où $\omega' = b(x_1)\,b(x_2)\ldots b(x_{n-1})\,dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n-1}$.

Cet opérateur transforme les formes à support compact, en formes à support compact. On vérifie que $d\bar{I}_n\alpha = \alpha - \bar{\omega}\int\alpha$ et comme avant on remarque que l'on peut prendre ω quelconque à support dans l'intérieur $\mathbf{R}_+^n$ telle que $\int\omega = 1$, et construire $I_n(\alpha) = \bar{I}_n(\alpha) - \bar{I}_n(\omega)\int\alpha$.

Montrons que si $\alpha \in \wedge_c^n(\mathbf{R}_+^n)$ alors $I_n(\alpha)(x) = 0$ pour tout $x \in \partial\mathbf{R}_+^n$. Ceci est vrai pour $n = 0, 1$. Supposons le vrai pour $(n-1)$. La formule définissant I_n montre que

$I_n(\alpha)(x) = I_{n-1}(\alpha_1)(x) \wedge dx^n$ pour tout $x \in \partial\mathbf{R}_+^n$, mais $I_{n-1}(\alpha_1)(x) = 0$ par hypothèse de récurrence.

3. Démonstration du théorème

(ii) implique (iii). Suivant Moser [1], on définit une famille à 1-paramètre de champs de vecteurs u_t en posant

(*) $\quad i(u_t)\,\tau_t + \alpha_t = 0,$

$i(u_t)\,\tau_t$ étant le produit intérieur de τ_t et u_t; c'est la $(n-1)$-forme définie par

$(i(u_t)\,\tau_t)(\xi_1 \ldots \xi_{n-1}) = \tau_t(u_t, \xi_1 \ldots \xi_{n-1})$ pour $n-1$ champs de vecteurs $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$.

Comme $\alpha_t \,|\, \partial M = 0$ et $\tau_t \neq 0$, on a $u_t \,|\, \partial M = 0$ et l'équation $\frac{d}{dt}(\Phi_t) = u_t$. Φ_t admet une solution Φ_t telle que $\Phi_0 = \mathrm{id}$; $\Phi_t \,|\, \partial M = \mathrm{id}$.