# §1. — Comparaison séries formelles — séries convergentes (cf. Malgrange [1])

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1974)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

# SUR LES POINTS SINGULIERS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

par Bernard MALGRANGE

## INTRODUCTION

Le présent article reprend, à quelques modifications près, une série d'exposés faits au séminaire Goulaouic-Schwartz en mars 1972. Le début est consacré à l'étude de l'indice analytique et de l'indice formel d'un opérateur différentiel, et à leur comparaison; les résultats sont très élémentaires, et il est d'autant plus surprenant que, à la connaissance de l'auteur, ils ne figurent pas dans la littérature classique consacrée aux équations différentielles. Signalons à ce propos que le théorème de l'indice analytique a été démontré indépendamment par H. Komatsu [1]. La fin de l'article a davantage un caractère d'exposition: il s'agit, au fond de reprendre les résultats sur les développements asymptotiques de Turritin, tels qu'ils sont exposés dans Wasow [1], en utilisant l'importante simplification apportée par N. Katz [1] dans ce genre de questions. Pour rendre l'exposé plus « original », nous avons préféré travailler avec les germes de fonctions $C^\infty$, plutôt qu'avec les développements asymptotiques de fonctions holomorphes dans des angles assez petits, comme le font Turritin et Wasow à la suite d'autres auteurs. La transposition de la méthode suivie ici à ce dernier cas se fait sans difficulté, et nous nous contenterons de l'esquisser à la fin du paragraphe 10.

## § 1. — COMPARAISON SÉRIES FORMELLES — SÉRIES CONVERGENTES (cf. Malgrange [1])

On pose $\mathcal{O} = \mathbf{C}\{x\}$, les séries convergentes d'une variable = les germes de fonction holomorphe en $0 \in \mathbf{C}$ ; $\hat{\mathcal{O}} = \mathbf{C}[[x]]$ les séries formelles à une variable; enfin $K$ et $\hat{K}$ désignent respectivement le corps des fractions de $\mathcal{O}$ et celui de $\hat{\mathcal{O}}$ (en particulier, $K$ est le corps des germes en 0 de fonctions

méromorphes). Pour $f \in \hat{K}$, on peut écrire $f = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_p x^p$, $f_p \in \mathbf{C}$, les $f_p$ étant nuls pour $p < p_0$; on note $v(f)$ le plus grand $p_0$ possédant cette propriété.

Considérons un opérateur différentiel $D = \sum_0^m a_p \frac{d^p}{dx^p}$, avec $a_p \in \mathcal{O}$ $(0 \leq p \leq m)$, et $a_m \neq 0$. On a d'abord le résultat suivant

*Proposition 1.1. L'application $D: \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ est à indice; son indice noté $\chi(D, \mathcal{O})$ est égal à $m - v(a_m)$.*

Rappelons qu'une application linéaire $u: E \to F$ ($E$, $F$, espaces vectoriels sur $\mathbf{C}$) est dite « à indice » si son noyau et son conoyau sont de dimension finie; l'indice de $u$, qu'on notera $\chi(u)$ (ou $\chi(u, E, F)$ ou toute autre notation analogue) est par définition le nombre dim ker $u$ − dim coker $u$.

*Démonstration.* Soit $\Delta_r \subset \mathbf{C}\,(r > 0)$ le disque fermé: $|x| \leqslant r$. Pour $p$ entier $\geqslant 0$, on note $B^p(\Delta_r)$ l'espace des fonctions sur $\Delta_r$ à valeurs complexes, de classe $\mathscr{C}^p$, et holomorphes sur $\mathring{\Delta}_r$; c'est un sous-espace fermé de $\mathscr{C}^p(\Delta_r)$, ce dernier espace étant muni d'une quelconque des normes équivalentes usuelles.

Choisissons $r$ assez petit pour que les $a_p$ soient holomorphes au voisinage de $\Delta_r$, et pour que $a_m$ ne s'annule pas dans $\Delta_r - \{0\}$.

*Lemme 1.2. L'application $D: B^m(\Delta_r) \to B^0(\Delta_r)$ est à indice, et son indice est égal à $m - v(a_m)$.*

En effet, écrivons $D = a_m \frac{d^m}{dx^m} + D'$; comme $D'$ est de degré $\leqslant m - 1$, le théorème d'Ascoli montre que l'application $D': B^m(\Delta_r) \to B^0(\Delta_r)$ est compacte. D'après les théorèmes connus de perturbation des opérateurs à indice, il suffit donc d'établir le résultat pour $D$ remplacé par $a_m \frac{d^m}{dx^m}$ cela se fait immédiatement en factorisant cette dernière application par

$$B^m(\Delta_r) \xrightarrow{\frac{d}{dx}} B^{m-1}(\Delta_r) \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \cdots \xrightarrow{\frac{d}{dx}} B^0(\Delta_r) \xrightarrow{a_m} B^0(\Delta_r)$$

et en utilisant l'additivité de l'indice par composition.

La proposition se déduit aussitôt du lemme précédent, en utilisant le fait que $\mathcal{O}$ est la limite inductive des $B^p(\Delta_r)$, pour $r \to 0$.

Passons maintenant au cas des séries formelles.

*Proposition 1.3. L'application $D : \hat{\mathcal{O}} \to \hat{\mathcal{O}}$ est à indice, et l'on a*

$$\chi(D, \hat{\mathcal{O}}) = \sup [p - v(a_p)] .$$

Posons en effet $n = \sup [p - v(a_p)]$; on a $v(a_p) \geqslant p - n$, avec égalité pour certaines valeurs de $p$, disons $p \in P$ : pour tout $p$, on a $a_p = x^{p-n} b_p$, avec $b_p \in \mathcal{O}$, et $b_p(0) \neq 0$ pour $p \in P$.

Soit $k$ un entier $\geqslant n$; on a

$$a_p \frac{d^p}{d x^p} x^k = k(k-1)\ldots(k-p+1)\, b_p(0)\, x^{k-n} + (\text{termes d'ordre} > k-n)$$

d'où $D x^k = \sum_{p \in P} k(k-1)\ldots(k-p+1)\, b_p(0)\, x^{k-n} + (\text{termes d'ordre} > k-n)$;

pour $k$ assez grand, disons $k \geqslant k_0$ le coefficient de $x^{k-n}$ dans l'expression précédente est $\neq 0$, puisque c'est un polynôme en $k$ dont le terme dominant $b_q(0)\, k^q$ $(q = \sup P)$ est non nul.

On déduit de là, par un calcul de récurrence sur les coefficients que pour $k \geqslant k_0$ et $g \subset \hat{\mathcal{O}}$ donné, avec $v(g) \geqslant k - n$, il existe un unique $f \in \hat{\mathcal{O}}$ vérifiant $v(f) \geqslant k$, $Df = g$; autrement dit, en désignant par $\hat{\mathfrak{m}}$ l'idéal maximal de $\hat{\mathcal{O}}$, on a un isomorphisme

$$D : \hat{\mathfrak{m}}^k \xrightarrow{\sim} \hat{\mathfrak{m}}^{k-n} \quad (k \geqslant k_0) .$$

La proposition résulte immédiatement de là, par exemple par un argument de suite exacte.

Considérons maintenant la suite exacte $0 \to \mathcal{O} \to \hat{\mathcal{O}} \to \hat{\mathcal{O}}/_{\mathcal{O}} \to 0$. En appliquant $D$ à chacun des 3 facteurs, on trouve une suite exacte de complexes; d'où une suite exacte de cohomologie.

$$0 \to \ker(D, \mathcal{O}) \to \ker(D, \hat{\mathcal{O}}) \to \ker D, \hat{\mathcal{O}}/_{\mathcal{O}}) \to \operatorname{coker}(D, \mathcal{O}) \to$$
$$\operatorname{coker}(D, \hat{\mathcal{O}}) \to \operatorname{coker}(D, \hat{\mathcal{O}}/_{\mathcal{O}}) \to 0$$

Le troisième et le sixième terme de cette suite exacte donnent donc les obstructions pour que les flèches $\ker(D, \mathcal{O}) \to \ker(D, \hat{\mathcal{O}})$ et $\operatorname{coker}(D, \mathcal{O}) \to \operatorname{coker}(D, \hat{\mathcal{O}})$ soient des isomorphismes. Le théorème de comparaison est alors le suivant

*Théorème 1.4.* On a 1) $\operatorname{coker}(D, \hat{\mathcal{O}}/_{\mathcal{O}}) = 0$,

2) $\dim \ker(D, \hat{\mathcal{O}}/_{\mathcal{O}}) = \sup [p - v(a_p)] - m + v(a_m)$.

L'assertion 1) signifie que, pour tout $f \in \hat{\mathcal{O}}$, il existe $g \in \hat{\mathcal{O}}$ et $h \in \mathcal{O}$ avec $f = Dg + h$; or, la démonstration de la proposition 1.3 montre qu'il suffit de prendre un $h$ tel qu'on ait $v(f-h) \geqslant k_0 - n$; par exemple il suffit de prendre pour $h$ la somme des termes de degré $< k_0 - n$ de $f$.

L'assertion 2) résulte alors immédiatement des propositions 1.1 et 1.3; d'où le théorème.

Pour qu'on ait $\ker(D, \hat{\mathcal{O}}/_{\mathcal{O}}) = 0$, et par conséquent, pour que les flèches $\ker(D, \mathcal{O}) \to \ker(D, \hat{\mathcal{O}})$ et $\operatorname{coker}(D, \mathcal{O}) \to \operatorname{coker}(D, \hat{\mathcal{O}})$ soient toutes deux bijectives, il faut et il suffit qu'on ait $m - v(a_m) = \sup[p - v(a_p)]$, autrement dit qu'on ait, pour tout $p$, $v(a_p) \geqslant v(a_m) + p - m$. Or c'est précisément la définition classique des points singuliers réguliers. Cela nous conduit à la définition suivante

*Définition 1.5. On appelle « irrégularité de $D$* (en 0)*» le nombre* $i(D) = \sup[p - v(a_p)] - [m - v(a_m)]$.

Un exemple classique (Euler) de point singulier irrégulier est le suivant: on prend $Df = x^2 \dfrac{df}{dx} - f$; posant $f_0 = \sum_{n \geq 0} n!\, x^{n+1}$, on a $Df = x$; on a ici $i(D) = 1$, donc la classe de $f_0$ modulo $\mathcal{O}$ est une base de $\ker(D, \hat{\mathcal{O}}/_{\mathcal{O}})$.

*Remarque 1.6.* La proposition 1.1. montre en particulier qu'on a $\dim \ker(D, \mathcal{O}) \geqslant m - v(a_m)$, ce qui est un théorème classique de Perron.

*Remarque 1.7.* Soit $\Omega$ un ouvert connexe de $\mathbf{C}$, et soit $D = \sum_0^m a_p \dfrac{d^p}{dx^p}$ un opérateur différentiel à coefficients dans $\mathscr{H}(\Omega)$, l'espace des fonctions holomorphes dans $\Omega$. Supposons qu'on ait $b^1 = \dim H^1(\Omega, \mathbf{C}) < +\infty$ et que le nombre $v(a_m, \Omega)$ des zéros de $a_m$ dans $\Omega$ (compté chacun avec son ordre) soit fini. On a alors le résultat suivant: l'application $D : \mathscr{H}(\Omega) \to \mathscr{H}(\Omega)$ est à indice, et l'on a $\chi(D, \mathscr{H}(\Omega)) = m(1 - b^1) - v(a_m, \Omega)$.

Cela peut se voir par exemple d'une manière analogue à la proposition 1.1 en approchant $\Omega$ par une suite convenable de compacts $K_i$ à bord régulier et en étudiant l'application $D : B^m(K_i) \to B^0(K_i)$.

On peut aussi opérer ainsi: soit $Z$ l'ensemble des zéros de $a_m$, et posons $\Omega^* = \Omega - Z$ ; sur $\Omega^*$, la suite de faisceaux

$$0 \to \ker(D, \mathscr{H}) \to \mathscr{H} \xrightarrow{D} \mathscr{H} \to 0$$

est exacte et ker $(D, \mathscr{H})$ est localement isomorphe à $\mathbf{C}^m$ (théorème d'existence et d'unicité usuel); par suite l'application $D : \mathscr{H}(\Omega^*) \to \mathscr{H}(\Omega^*)$ a pour indice $m(1 - b^1_*)$, $b^1_* = \dim H^1(\Omega^*, \mathbf{C})$.

D'autre part, pour chaque $a \in Z$, soit $\Delta_a$ un disque ouvert centré en $a$, avec $\Delta_a \in \Omega$, $\Delta_a \cap \Delta_b = \phi$ si $a \neq b$. Comme $H^1(\Omega, \mathscr{H}) = 0$, on a

$$\mathscr{H}(\Omega^*)/\mathscr{H}(\Omega) \simeq \bigoplus_{a \in \Delta_a} \mathscr{H}(\Delta^*_a)/\mathscr{H}(\Delta_a), \text{ avec } \Delta^*_a = \Delta_a - \{a\}.$$

On a $\chi(D, \mathscr{H}(\Delta^*_a)) = 0$ par le raisonnement précédent, et $\chi(D, \mathscr{H}(\Delta_a)) = m - v(a_m, a)$ (par passage à la limite projective, à partir de 1.2.) On conclut alors en utilisant la suite exacte

$$0 \to \mathscr{H}(\Omega) \to \mathscr{H}(\Omega^*) \to \mathscr{H}(\Omega^*)/\mathscr{H}(\Omega) \to 0.$$

## § 2. — Autres théorèmes de comparaison

Nous reprenons les hypothèses de la proposition 1.1.

*Théorème 2.1.*

a) *L'application* $D : K \to K$ *est à indice et l'on a* $\chi(D, K) = -i(D)$.

b) *L'application* $D : \hat{K} \to \hat{K}$ *est à indice, et l'on a* $\chi(D, \hat{K}) = 0$.

c) *On a* coker $(D, \hat{K}/K) = 0$ *et* dim ker $(D, \hat{K}/K) = i(D)$.

L'assertion c) résulte de 1.4 et de l'isomorphisme naturel $\hat{\mathcal{O}}/_{\mathcal{O}} \xrightarrow{\sim} \hat{K}/_K$. Les assertions a) et b) vont résulter du lemme suivant:

*Lemme 2.2. L'application* $D : K/_{\mathcal{O}} \to K/_{\mathcal{O}}$ *a pour indice* $-\sup[p - v(a_p)]$.

Désignons en effet par $K_{-p}$ l'ensemble des éléments $f$ de $K$, avec $v(f) \geqslant -p$; un calcul analogue à celui de la proposition 1.3 fait avec les puissances négatives de $x$ montre qu'on a, avec $n = \sup[p - v(a_p)]$: $D K_{-p} \subset K_{-p-n}$, et que, pour $p$ assez grand, l'application $D : K/K_{-p} \to K/K_{-p-n}$ est un isomorphisme. Le lemme en résulte immédiatement. L'assertion a) résulte alors de 1.1 et 2.2 en utilisant la suite exacte $0 \to \mathcal{O} \to K \to K/_{\mathcal{O}} \to 0$; l'assertion b) résulte de manière analogue de 1.3 et 2.2, et de l'isomorphisme $K/_{\mathcal{O}} \xrightarrow{\sim} \hat{K}/\hat{\mathcal{O}}$.

Soit $S_n$ l'espace des fonctions holomorphes dans la couronne $0 < |x| < r$, et $S = \bigcup_{r>0} S_r$. On a le résultat suivant (cf. Deligne [1], prop. II.6.20).