§5. — Irrégularité d'un système différentiel formel

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1974)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **05.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

et que ce dernier indice est égal à $m - v$, v le nombre des zéros dans Δ_r de $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y_m}(x, f_0, \ldots, f_0{}^{(m)})$.

Soit maintenant r quelconque, avec $0 \leqslant r < 1$. Pour $r' > r$, assez voisin de r, le cercle $|x| = r'$ ne contiendra pas de points singuliers de (E) en f_0. On pourra alors faire la construction précédente, et obtenir un germe d'espace analytique; pour tous les r' assez voisins de r, ces germes coïncident, en vertu du résultat suivant; il existe $r_0 > r$ possédant la propriété suivante: pour tout r', avec $r < r' < r_0$, on peut trouver $\varepsilon(r') > 0$ tel que toute f solution de (E) dans $\overset{\circ}{\Delta}_{r'}$, et vérifiant $\sup\limits_{|x| \leqslant r'} |f(x) - f_0(x)| \leqslant \varepsilon(r')$ se prolonge en une solution de (E) dans $\overset{\circ}{\Delta}_{r_0}$ (Cela se déduit facilement des résultats sur la « dépendance des conditions initiales ». dans le théorème d'existence et d'unicité). Cela nous définit un germe d'espace analytique paramétrant les solutions voisines de f_0 dans $\mathscr{H}(\Delta_r)$; en particulier, cela vaut pour $r = 0$, i.e. pour les solutions voisines de f_0 dans $\mathcal{O}$.

Il faut noter cependant que le résultat précédent n'est guère satisfaisant, d'une part, les solutions d'une équation différentielle non-linéaire ont en général des domaines d'existences variables, et non univalents, ce qui rend le problème considéré un peu artificiel. D'autre part, le germe qui vient d'être construit, est bien universel en f_0; mais il peut ne pas être universel aux points voisins, à cause de l'existence des singularités mobiles (par contre, s'il n'y a que des singularité fixes, on peut voir que ce canular ne se produit pas).

§ 5. — Irrégularité d'un système différentiel formel

Soit $D = x^{k+1}\dfrac{d}{dx} - M$, avec $M \in \mathrm{End}(\hat{K}^m)$, $k \in ;\mathbf{Z}$ on va définir l'irrégularité de D par une adaptation des calculs des § 1-3. Tout d'abord on se ramène à $k = 0$ en posant pour $l \in \mathbf{Z} : i(x^l D) = i(D)$. *Dans toute la suite du paragraphe, on supposera donc* $k = 0$.

Rappelons qu'on appelle *réseau* dans $\hat{K}^m$ un sous $\hat{\mathcal{O}}$-module E de type fini tel qu'on ait $E \underset{\hat{\mathcal{O}}}{\otimes} \hat{K} = \hat{K}^m$; il est connu qu'un tel E est libre sur $\hat{\mathcal{O}}$, donc est de la forme $A\,\hat{\mathcal{O}}^m$, avec $A \in \mathrm{Gl}(m, \hat{K})$ et réciproquement. Si l'on

a deux réseaux $E \subset E_1$, il existe $k \in \mathbf{N}$ vérifiant $x^k E_1 \subset E$; on en déduit immédiatement que E_1/E est de dimension finie sur $\mathbf{C}$.

Proposition 5.1. Soient E et E_1 deux réseaux vérifiant $DE \subset E_1$. Alors l'application $D : E \to E_1$ est à indice.

Dans la suite, cet indice sera noté $\chi(D; E, E_1)$.

Démonstration. Supposons d'abord la proposition démontrée pour un couple particulier (E, E_1), et démontrons-là pour un autre couple (E', E'_1). Prenons un troisième couple (E'', E''_1) vérifiant $E'' \supset E \cup E'$, $E''_1 \supset E_1 \cup E'_1$, $DE'' \subset E''_1$.

Considérons la suite exacte de morphismes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & E & \to & E'' & \to & E''/E & \to & 0 \\ & & \downarrow D & & \downarrow D & & \downarrow D & & \\ 0 & \to & E_1 & \to & E''_1 & \to & E''_1/E_1 & \to & 0 \end{array}$$

La première flèche verticale est à indice par hypothèse, et la troisième l'est aussi puisqu'elle va d'un espace de dimension finie dans un autre. Par suite la seconde est à indice; de plus, on a

$$\chi(D; E'', E''_1) = x(D; E, E_1) + \dim E''/E - \dim E''_1/E_1 \tag{5.2}$$

On opère ensuite de même avec les couples (E', E'_1) et (E'', E''_1).

Reste à trouver un couple particulier (E, E_1) tel que $D : E \to E_1$ soit à indice; pour cela, en utilisant le théorème (3.1) (qui est vrai aussi pour $\hat{K}$ au lieu de K), on se ramène au cas où M a la forme suivante

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \lambda_0 & \cdots & \lambda_{m-2} & \lambda_{m-1} \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

Posons comme au paragraphe 3, $\Delta = \partial^m - \lambda_{m-1}\partial^{m-1} - \ldots - \lambda_0$, avec $\partial = x\dfrac{d}{dx}$; posons encore $i = i(\Delta) = \sup\left(0, \sup -v(\lambda_p)\right)$ et prenons $E = \hat{\mathcal{O}}^m$, $E_1 = \hat{\mathcal{O}}^{m-1} \oplus x^{-1}\hat{\mathcal{O}}$; les raisonnements des § 1-3 montrent que

l'application $D : E \to E_1$ a un noyau (resp. un conoyau) isomorphe au noyau (resp. du conoyau) de l'application $\Delta : \hat{\mathcal{O}} \to x^{-1}\hat{\mathcal{O}}$, et que cette dernière application est d'indice nul. D'où la proposition.

Considérons maintenant tous les couples de réseaux (E, E_1) avec $E \subset E_1, DE \subset E_1$; je dis que le nombre $\chi(D; E, E_1) + \dim E_1/E$ est indépendant du couple (E, E_1). Pour établir ce résultat, il suffit de raisonner comme à la proposition précédente, et d'utiliser 5.2. Cela justifie la définition suivante:

Définition 5.3. On appelle irrégularité de D le nombre $\chi(D; E, E_1) + \dim E_1/E$, E et E_1 étant deux réseaux vérifiant $E \subset E_1$, $DE \subset E_1$.

Le calcul fait à la fin de la proposition précédente, montre immédiatement que si M est de la forme 5.3, on *a*, comme en 3.2.

$$i(D) = \sup\left(0, \sup -v(\lambda_p)\right) \tag{5.4}$$

Par conséquent, notre définition coïncide dans le cas analytique avec celle du § 3; et l'on a encore $i(D) \geqslant 0$.

On définit encore les points singuliers réguliers comme au § 3, avec $\hat{K}$ au lieu de K (il est équivalent de dire qu'il existe un réseau E tel qu'on ait $DE \subset E$). La proposition suivante se démontre alors comme 3.4.

Proposition 5.5. Pour que 0 soit un point singulier régulier, il faut et il suffit qu'on ait $i(D) = 0$.

Proposition 5.6. Si l'on a $M = \sum_{-k}^{+\infty} M_p x^p$ $(k \geqslant 1)$, on a $i(D) \leqslant k\,m$; pour qu'on ait $i(D) \leqslant k\,m$, il faut et il suffit que M_{-k} soit inversible.

Pour démontrer cette proposition, nous allons appliquer la définition 5.3, avec $E = \hat{\mathcal{O}}^m$ $E_1 = x^{-k}\hat{\mathcal{O}}^m$; en remplaçant D par $x^k D$, il revient au même de démontrer l'assertion suivante: l'indice de l'application $x^k D : \hat{\mathcal{O}}^m \to \hat{\mathcal{O}}^m$ est $\leqslant 0$; cet indice est nul si et seulement si M_{-k} est inversible.

Supposons d'abord M_{-k} inversible; pour tout monôme $A x^p$, $A \in \mathbf{C}^m$, on a $(x^k D)(Ax^p) = M_{-k} A x^p +$ (termes d'ordre $\geqslant p+1$); donc, de proche en proche, on voit que $x^k D : \hat{\mathcal{O}}^m \to \hat{\mathcal{O}}^m$ est bijectif, donc d'indice nul.

Dans le cas général, prenons un p entier $\geqslant 0$; les arguments de suite exacte déjà utilisés en 5.1 montrent que l'application précédente a même indice que

$$x^k D : \hat{\mathfrak{m}}^p(\hat{\mathcal{O}}^m) \to \hat{\mathfrak{m}}^p(\hat{\mathcal{O}}^m) \qquad (\hat{\mathfrak{m}}, \text{ l'idéal maximal de } \hat{\mathcal{O}}).$$

Cette dernière application est injective pour p assez grand, puisque $\ker(x^k D, \hat{\mathcal{O}}^m)$ est de dimension finie sur $\mathbf{C}$. Donc son indice est $\leqslant 0$, et il est nul si et seulement si l'application est surjective. Dans ce dernier cas, par passage au quotient, l'application $x^k D$ de $\hat{\mathfrak{m}}^p(\hat{\mathcal{O}}^m)/\hat{\mathfrak{m}}^{p+1}(\hat{\mathcal{O}}^m)$ dans lui-même sera encore surjective; or dans la base évidente, la matrice de cette application est précisément M_{-k}; donc M_{-k} doit être surjective, donc inversible. D'où la proposition.

Signalons pour terminer, sans démonstration, une autre manière de définir $i(D)$, due à Gérard et Levelt [1]. On prend un réseau E et on forme la suite de réseaux E_p définie par $E_0 = E, \ldots, E_p = E_{p-1} \oplus D E_{p-1}$ (le fait qu'on obtienne bien ainsi deux réseaux résulte facilement de la formule $D(\varphi F) = \varphi D F + (\partial\varphi) F, \varphi \in \hat{\mathcal{O}}$); posons ensuite $\bar{E}_p = E_p/E_{p-1}$. L'application D induit une application surjective $\bar{D} : \bar{E}_p \to \bar{E}_{p+1}$, donc $\dim_{\mathbf{C}} \bar{E}_p$ est décroissante, et indépendante de p pour p assez grand. On démontre que cette dimension ne dépend pas non plus de E, et qu'elle est précisément égale à $i(D)$.

Supposons en particulier que 0 soit un point singulier régulier: on aura alors $\bar{E}_p = 0$ pour p assez grand; en fait, on démontre même qu'on a nécessairement, quel que soit $E : \bar{E}_m = 0$, donc $D E_{m-1} \subset E_{m-1}$; ceci donne un critère simple pour reconnaître effectivement si l'on est dans le cas d'un point singulier régulier (ce critère se trouve déjà, au moins implicitement, dans Manin [1]. Un critère différent se trouve dans Moser [1]).

§ 6. — Points singuliers réguliers

Ce paragraphe est en grande partie composé de rappels, empruntés à Wasow [1]. On pourra trouver un exposé plus systématique dans Manin [1].

Traitons d'abord le cas formel; soit $D = x \dfrac{d}{dx} - M$, avec, $M \in \operatorname{End}(\hat{\mathcal{O}}^m)$ (i.e. $M \in \operatorname{End}(\hat{K}^m)$, sans pôle).

Proposition 6.1. Supposons que deux valeurs propres distinctes de $M(0)$ ne diffèrent jamais d'un entier. Il existe alors un et un seul $A \in \operatorname{End}(\hat{\mathcal{O}}^m)$, avec $A(0) = I$ tel que la transformation $F = A G$ transforme D en $D' = x \dfrac{d}{dx} - M(0)$.