§8. — Le cas favorable

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **20 (1974)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

transformation du type $F = A F_1$, $G = A G_1$, avec $A \in \mathrm{Gl}\,(m, K\mathscr{E})$. D'après le corollaire (6.4), on peut donc supposer $k = 1$, et M constant; on peut même supposer que M est triangulaire inférieure; alors en raisonnant par récurrence, on est ramené à démontrer le résultat lorsque D est l'opérateur différentiel scalaire $x \dfrac{d}{dx} - \lambda$, $\lambda \in \mathbf{C}$; ce cas peut être laissé au lecteur, (ici, on pourra même prendre $l = 0$, mais peu importe).

§ 8. — Le cas favorable

La proposition suivante est classique:

Proposition 8.1. Avec les notations du lemme 7.2, supposons $k \geqslant 1$, et supposons que les valeurs propres λ_j de $M(0)$ vérifient $Re(\lambda_j) \neq 0$. Alors le lemme 7.2 est vrai avec $l = 0$.

Démonstration

i) Il suffit de démontrer la proposition pour $M = M(0)$; en effet, supposons le résultat établi dans ce cas; soit $K^0 : B(p; a)^m \to B(p; a)^m$ l'inverse à droite de $x^{k+1} \dfrac{d}{dx} - M(0)$ (K^0 dépend de a, mais non de $p \geqslant p_0$); on pose alors $M(x) = M(0) + x N(x)$, $N \in \mathrm{End}\,(\mathscr{E}^m)$, et on note L l'application $F \mapsto x N K^0 F$; il suffit de trouver K^1, inverse de $I - L$, car alors $K^0 K^1 = K$ sera un inverse à droite de D.

Or, pour $a \leqslant a_0$, on a $|K_0 F|_{p_0} \leqslant C\,|F|_{p_0}$ (cf. remarque suivant l'énoncé du lemme 7.2), d'où, par un calcul analogue à ceux du § 7: $|L F|_{p_0} \leqslant C' a\,|F|_{p_0}$; en choisissant a pour qu'on ait $C' a < 1$, on voit que la série $K^1 = \Sigma L^n$ converge dans l'espace des applications linéaires continues de $B(p_0; a)^m$ dans lui-même.

Montrons par récurrence sur $p \geqslant p_0$ que K^1 envoie continuement $B(p; a)^m$ dans lui-même; supposons donc le résultat acquis pour $p - 1$; l'équation $H = K^1 G$ équivaut à $H = G + L H$; si G parcourt un borné de $B(p, a)^m$, H parcourt un borné de $B(p-1; a)^m$ par hypothèse de récurrence; donc $L H = x N K^0 H$ parcourt un borné de $B(p; a)^m$; donc $H = C + L H$ parcourt un borné de $B(p; a)^m$, ce qui démontre le résultat.

Il est alors clair que $K = K^0 K^1$ répond à la question; d'où la proposition.

ii) Démontrons maintenant le résultat pour M constant; on peut supposer M triangulaire inférieure; alors par récurrence sur m, on est ramené à établir le résultat pour l'opérateur différentiel scalaire $x^{k+1}\dfrac{d}{dx} - \lambda$, avec $\lambda \in \mathbf{C}$, $Re\,\lambda \neq 0$; posons $\lambda = k(\mu + i\nu)$; la transformation $f = \exp(-i\nu x^{-k}) f_1$ nous ramène au cas où $\nu = 0$; alors la solution générale de l'équation $x^{k+1}\dfrac{df}{dx} - k\mu f = g$ s'écrit

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} t^{-k-1} \exp\left[\mu(t^{-k} - x^{-k})\right] g(t)\, dt.$$

Pour $\mu > 0$, on choisira $x_0 = a$ (par exemple $x_0 = 1$), et pour $\mu < 0$, on choisira $x_0 = 0$; dans les deux cas, on doit démontrer que pour $p \in \mathbf{N}$, et x tendant vers 0, on a

$$\int_{x_0}^{x} t^{p-k-1} \exp\left[(\mu(t^{-k} - x^{-k})\right] g(t)\, dt = 0(x^p)$$

Faisons la démonstration pour $\mu > 0$ (le cas $\mu < 0$ est analogue et un peu plus simple); par le changement de variables $s = t^{-k}$, $y = x^{-k}$, $p/k = q$, on est ramené à démontrer qu'on a, pour $y \to +\infty$.

$$\int_{1}^{y} s^{-q} \exp \mu(s-y)\, dy = 0(y^{-q})$$

En intégrant par parties, on trouve que le terme tout intégré est de l'ordre voulu, et il reste à évaluer $\int_1^y s^{-q-1} \exp \mu(s-y)\, dy$; supposant $y > 2$, on coupe la dernière intégrale en $\int_1^{y/2}$ et $\int_{y/2}^{y}$; on majore $\int_1^{y/2}$ en y remplaçant s^{-q-1} par 1, et $\int_{y/2}^{y}$ en y remplaçant $\exp \mu(s-y)$ par 1; nous laissons les détails au lecteur (en fait, en continuant les intégrations par parties, on obtiendrait un développement asymptotique de l'intégrale envisagée; cela correspond en fait à démontrer le théorème 7.1 pour l'équation $x^{k+1}\dfrac{df}{dx} - k\mu f = x^p$, et la solution formelle évidente de cette équation!). La proposition est donc démontrée.

Corollaire 8.2 (cf. Wasow [1]). *Dans les hypothèses du théorème 7.1, supposons en outre qu'on ait $k \geqslant 1$, et que la matrice $\dfrac{\partial \Phi}{\partial Y}(0, Y^0)$ ait toutes ses valeurs propres de partie réelle non nulle. Alors le théorème (7.1) est vrai.*

Cela résulte de la démonstration de l'implication (7.2) $\Rightarrow$ (7.1).

Remarque 8.3. Dans les hypothèses précédents, et même dans l'hypothèse plus faible « $\Phi(0, Y^0) = 0, \dfrac{\partial \Phi}{\partial Y}(0, Y^0)$ inversible », il exsite une et une seule série formelle H vérifiant $H(0) = Y^0$ et $x^{k+1} \dfrac{dH}{dx} = \hat{\Phi}(x, H)$. Cela se voit par le même calcul que le théorème des fonctions implicites pour les séries formelles (puisque l'application $H \to x^{k+1} \dfrac{dH}{dx}$ augmente strictement le degré des monômes).

Donnons maintenant une application des résultats précédents qui jouera un rôle essentiel dans la suite.

Proposition 8.4. (Sibuya; cf. Wasow [1]). *Soit* $D = x^{k+1} \dfrac{d}{dx} - M$, *avec* $M \in \mathrm{End}\,(\mathscr{E}^m)$. *Supposons qu'on ait une décomposition de* $M(0)$ *en deux blocs* $M(0) = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$, $P \in \mathrm{End}\,(\mathbf{C}^p)$, $Q \in \mathrm{End}\,(\mathbf{C}^q)$, $p + q = m$; *désignons par* λ_i (resp μ_j) *les valeurs propres de* P (resp de Q) *et supposons que, pour tout* (i, j), *on ait* $Re\,(\lambda_i) \neq Re\,(\mu_j)$. *Alors il existe* $A \in \mathrm{Gl}\,(m, \mathscr{E})$, *avec* $A(0) = I$ *tel que la transformation* $F = A\,F$, *transforme* D *en* $x^{k+1} \dfrac{d}{dx} - N$, *avec* $N = \begin{pmatrix} N' & 0 \\ 0 & N'' \end{pmatrix}$, $N' \in \mathrm{End}\,(\mathscr{E}^p)$, $N'' \in \mathrm{End}\,(\mathscr{E}^q)$.

Posons $M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$ avec $M_{11} \in \mathrm{End}\,(\mathscr{E}^p)$, etc.; on cherche a priori A sous la forme $A = I + \begin{pmatrix} 0 & A' \\ A'' & 0 \end{pmatrix}$, $A'(0) = 0$, $A''(0) = 0$; on doit avoir $x^{k+1} \dfrac{dA}{dx} = M\,A - A\,N$; en égalant les blocs d'indice (11) et (21) dans cette équation, on trouve

$$\begin{cases} M_{11} + M_{12}\,A'' = N' \\ M_{21} + M_{22}\,A'' = A''\,N' + x^{k+1} \dfrac{dA''}{dx} \end{cases}$$

En tirant N' de la première équation, on trouve l'équation suivante pour A'' : $x^{k+1} \dfrac{dA''}{dx} = M_{21} + M_{22}\,A'' - A''\,M_{11} - A''\,M_{12}\,A''$.

Nous allons appliquer à cette équation la remarque 8.3 et le corollaire 8.2 (le fait que notre équation soit à coefficients complexes n'est pas

gênant, il suffirait de séparer les parties réelles et imaginaires); on prend ici $\Phi(x, A'') = M_{21} + M_{22} A'' - A'' M_{11} - A'' M_{12} A''$; on a bien $\Phi(0,0) = M_{21}(0) = 0$; et $\frac{\partial \Phi}{\partial A''}(0,0)$ est l'application $\alpha \mapsto M_{22}(0)\alpha - \alpha M_{11}(0) = Q\alpha - \alpha P$, $\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathbf{C}^q, \mathbf{C}^p)$; le lemme (6.2) montre que les valeurs propres de cette application sont les $\mu_j - \lambda_i$, donc ont leur partie réelle non nulle; la remarque 8.3 donne alors l'existence d'une solution formelle $\hat{A}''$, et le corollaire 8.2 l'existence de A''; on opère de même avec les blocs (1 2) et (2 2) pour trouver A'.

Remarque 8.5. Si l'on affaiblit les hypothèses de la proposition 8.4 en supposant seulement qu'on a, pour tout (i, j) $\lambda_i \neq \mu_j$, la partie formelle du raisonnement précédent montre qu'on peut trouver A, avec $A(0) = I$, tel que $\hat{N}$ soit de la forme $N = \begin{pmatrix} \hat{N}' & 0 \\ 0 & \hat{N}'' \end{pmatrix}$. Cela jouera un rôle important dans la suite (en fait, le théorème (7.1) montrera finalement que la proposition 8.4 reste vraie sous cette hypothèse affaiblie; mais, au point où nous en sommes, nous n'avons pas encore le droit d'utiliser ce résultat; comme on va le voir, cela va nous obliger à quelques contorsions!).

§ 9. — Démonstration du lemme fondamental

A. Démontrons d'abord le résultat pour $m = 1$; soit $D = x^{k+1} \frac{d}{dx} - m$, $m \in \mathscr{E}$; si $Re\, m(0) \neq 0$, cela résulte de 8.1; si $k \geqslant 1$, et $m(0) = ik\lambda$, $\lambda \neq 0$, la transformation $f = \exp(-i\lambda x^{-k}) f_1$ nous ramène à $m(0) = 0$, donc on est ramené de k à $k - 1$; par récurrence, on est ramené à $k = 0$, i.e. au cas d'un point singulier régulier.

Dans la suite, nous procéderons par récurrence sur m, et supposerons donc le résultat établi pour $1, \ldots, m - 1$.

B. Si $k = 0$, le résultat est établi par la proposition 7.3. Supposons donc $k \geqslant 1$, et soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de $M(0)$; supposons qu'on ait, pour un i au moins $Re(\lambda_i) \neq 0$; alors le lemme fondamental résulte de l'hypothèse de récurrence; en effet, si pour tout i on a $Re\, \lambda_i \neq 0$, on est dans le cas favorable 8.1; si, pour un j, on a $Re\, \lambda_j = 0$, on peut décomposer $M(0)$ par une transformation linéaire en deux blocs $\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$, les