Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 20 (1974)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES POINTS SINGULIERS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Autor: Malgrange, Bernard

Kapitel: §10. — Applications

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-46900

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

le cas D_2, d'après la remarque précédente, r est entier, donc le procédé donné en D_2 diminue $i(D)$.

Le lemme (C, i) et donc aussi le lemme fondamental, est ainsi complètement établi.

Remarque. Au lieu de faire une récurrence sur l'irrégularité $i(D)$, il aurait été tout aussi naturel (et même encore plus) d'utiliser a priori « l'irrégularité de Katz », i.e. le nombre r qui vient d'être introduit et qui mesure l'ordre minimum des pôles à considérer (voir à ce sujet Gérard-Levelt [1], et un article à paraître de Levelt).

§ 10. — Applications

A. Le théorème 7.1 entraîne le théorème suivant, en apparence plus général:

Théorème 10.1. Soit Φ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ des $2m+1$ variables x, $Y = (y_1, \ldots, y_m)$, et $Z = (z_1, \ldots, z_m)$ au voisinage de $0, Y^0, Z^0$, à valeurs dans $\mathbf{R}^m$; supposons qu'il existe une série formelle $H \in \hat{\mathcal{O}}^m$ (à coefficients réels) vérifiant $H(0) = Y^0$, $\frac{dH}{dx}(0) = Z^0$, et $\hat{\Phi}(x, H, \frac{dH}{dx}) = 0$; supposons enfin que la matrice $\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial Z}(x, H(x), \frac{dH}{dx})$ soit inversible sur $\hat{K}$ (i.e. appartienne à $\mathrm{Gl}(m, \hat{K})$); alors, il existe $F \in \mathscr{E}^m$, à valeurs réelles vérifiant $\hat{F} = H$, $\Phi(x, H, \frac{dH}{dx}) = 0$.

La réduction de ce résultat au cas (7.1) se fait suivant une méthode habituelle dans des questions voisines.

a) On traite d'abord le cas où l'on a $\Phi(x, Y, Z) = \Psi(x, Y)Z - \chi(x, Y)$, Ψ une matrice d'ordre m à coefficients $\mathscr{C}^\infty$; pour cela, on se ramène au cas où $H = 0$, donc $Y^0 = Z^0 = 0$; on a alors la situation suivante: $\chi(x, 0)$ est plat, et $\Psi(x, 0)$ est inversible dans $K\mathscr{E}$; il existe donc $M \in \mathrm{End}(\mathscr{E}^m)$ et $k \in \mathbf{N}$ tel qu'on ait $M\Psi(x, 0) = x^k I$; posons alors $F = x^k G$; on a $M\Psi(x, x^k G) = x^k \Psi_1(x, G)$, avec $\Psi_1(x, 0) = I$, donc $\Psi_1(x, Y)$ inversible au voisinage de $(0, 0)$ dans les matrices à coefficients $\mathscr{C}^\infty$; on a aussi $M\chi(x, x^k G) = x^k \chi_1(x, G)$, avec χ_1 de classe $\mathscr{C}^\infty$; on est alors ramené à l'équation

$$x^k \frac{d\,G}{d\,x} = -\,k\,x^{k-1}\,G + \Psi_1^{-1}(x, G)\,\chi_1(x, G)$$

b) On ramène le cas général au précédent, par dérivation, en remplaçant l'équation initiale par le système

$$\begin{cases} \dfrac{d\,F}{d\,x} - G = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial\,\Psi}{\partial\,x}(x, F, G) + \dfrac{\partial\,\Psi}{\partial\,Y}(x, F, G)\,G + \dfrac{\partial\,\Psi}{\partial\,Z}(x, F, G)\,\dfrac{d\,G}{d\,x} = 0 \end{cases}$$

B. Dans le cas linéaire, on a le théorème suivant

Théorème 10.2. Soit $D = x^k \dfrac{d\,F}{d\,x} - M\,F$, *avec* $k \in \mathbf{N}$, $M \in \mathrm{End}\,(\mathscr{E}^m)$; *soit* $\mathscr{D}'$ *l'espace des germes de distributions en* 0 *dans* $\mathbf{R}$; *alors, on a* $D\,\mathscr{D}' = \mathscr{D}'$

Soit $a > 0$, assez petit, et soit I l'intervalle $[-a, a]$; par dualité, il suffit de démontrer que l'application $D' : \mathscr{D}_I^m \to \mathscr{D}_I^m$ est d'image fermée ($\mathscr{D}_I$ désignant l'espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support dans I); d'après un lemme classique puisque $\mathscr{D}_I$ est un espace de Fréchet, il suffit de démontrer que $D'\,\mathscr{D}_I^m$ est de codimension finie dans $\mathscr{D}_I^m$; soit E l'espace des $F \in \mathscr{C}^\infty\,(I)^m$ telles qu'on ait $D'\,F \subset \mathscr{D}_I^m$; d'après le théorème d'existence et d'unicité usuel, $\mathscr{D}_I^m$ est le sous-espace de E formé des F telles qu'on ait $F(-a) = F(a) = 0$, donc $\mathscr{D}_I^m$ est de codimension finie dans E, et il suffit de démontrer que $D'\,E$ est de codimension finie dans $\mathscr{D}_I$; or, le théorème 7.1, joint au théorème usuel de prolongement des solutions d'une équation différentielle montre que $D'\,E$ est l'ensemble des $F \in \mathscr{D}_I^m$ tels qu'on ait $\hat{F} \in \hat{D}'\,\hat{\mathscr{O}}^m$; ceci joint au fait que $D' : \hat{\mathscr{O}}^m \to \hat{\mathscr{O}}^m$ est à indice (proposition 3.6) et à la surjectivité de l'application $\hat{\ } : \mathscr{D}_I \to \hat{\mathscr{O}}$, entraîne le résultat cherché.

C. Le théorème 7.1 a été démontré indépendamment par Kouznetsov [1] qui en a donné une intéressante application à l'étude des « formes normales » des systèmes différentiels. Disons qu'un système $D = x\dfrac{d}{d\,x} - M$, $M \in \mathrm{End}\,(K\,\mathscr{E}^m)$ est « élémentaire » si l'on a $M = \sum_{-k}^{-1} \lambda_p\,x^p\,I + M_0$, avec $M_0 \in \mathrm{End}\,(\mathbf{C}^m)$ et $\lambda_p \in \mathbf{C}$; on a alors le résultat suivant:

Théorème 10.3 — (Kouznetsov). Soit $D = x\dfrac{d}{dx} - M$, $M \in \mathrm{End}\,(K\mathscr{E}^m)$ *un système différentiel. Par un changement de variables* $x = y^q$ *(q entier* $\geqslant 0$*) suivi d'une transformation* $F = A\,F_1$, $A \in \mathrm{Gl}\,(m, K\mathscr{E})$, *on peut réduire D à la forme « diagonale »*

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & & 0 \\ & \cdot & \\ & & \cdot \\ 0 & & D_p \end{pmatrix}$$

les D_j *étant élémentaires.*

Indiquons rapidement comment ce résultat peut se démontrer; tout d'abord, le théorème 7.1 permet de se réduire à démontrer le résultat analogue dans le cas formel, c'est-à-dire dans le cas où l'on remplace dans l'énoncé précédent $\mathscr{E}$ par $\hat{\mathscr{O}}$, et $K\mathscr{E}$ par $\hat{K}$. Dans ce dernier cas, le résultat dû à Turrittin, peut se démontrer par les mêmes arguments que ceux employés au § 9; d'ailleurs, ici, les choses se simplifient; il suffit d'une double récurrence sur m d'une part, $i\,(D)$ (ou mieux encore, l'irrégularité de Katz) d'autre part; nous n'entrerons pas dans les détails.

Soit enfin Δ un secteur angulaire fermé de sommet 0 dans $\mathbf{C}$, de mesuer angulaire $\mu\,(\Delta)$; désignons par $\mathscr{A}\,(\Delta)$ l'espace des germes en 0 de fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur Δ, et holomorphes dans l'intérieur de Δ. D'après Turritin et Wasow, les théorèmes 7.1 et 10.3 sont encore vrais lorsqu'on y remplace $\mathscr{E}$ par $\mathscr{A}\,(\Delta)$, et $K\mathscr{E}$ par $K \underset{\mathscr{O}}{\otimes} \mathscr{A}\,(\Delta)$ pourvu que $\mu\,(\Delta)$ soit assez petit (pour le théorème 7.1, il suffit qu'on ait $\mu\,(\Delta) < \dfrac{\pi}{k}$); à vrai dire, ces auteurs travaillent avec des « fonctions holomorphes dans un secteur ouvert, admettant un développement asymptotique en 0 », et non avec $\mathscr{A}\,(\Delta)$, mais le lecteur vérifiera facilement qu'il s'agit là d'une modification inoffensive.

La démonstration, sous ces nouvelles hypothèses, est presque la même que la précédente, et même plus simple: en effet, on démontre directement 8.2 sous l'hypothèse « $\lambda_j \neq 0$ » (voir Wasow [1]); pour établir 7.1, on n'a alors plus besoin de « systèmes standard », et il suffit d'une double récurrence sur $(m, i\,(D))$. La démonstration ainsi esquissée est d'ailleurs celle que donne Wasow à la simplification près qu'apporte la transformation de Katz. Quant aux énoncés relatifs au développement asymptotique des solutions d'une équation différentielle, ils sont une conséquence facile de cette version du théorème 10.3; nous laissons cette question au lecteur.