**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
**Band:** 21 (1975)
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** INTRODUCTION A LA THÉORIE DES SURFACES DE RIEMANN
**Autor:** Guenot, J. / Narasimhan, R.
**Kapitel:** §2. Variétés holomorphes
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-47334

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 02.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

Une utilisation répétée de l'argument développé au corollaire 4 du théorème 1 montre qu'il existe pour tout polydisque $D$ relativement compact dans $U$ et pour tout multi-indice $\alpha$ une constante $c_{\alpha,D}$ telle que

$$\left\| \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z_1^{\alpha_1} \dots \partial z_n^{\alpha_n}} \right\|_{\overline{D}} \leqslant c_{\alpha,D} \| f \|_{L^1,K}$$

où $K$ est un voisinage compact de l'adhérence de $D$ dans $U$. L'assertion en résulte aussitôt.

## § 2. Variétés holomorphes

Toutes les cartes de variétés topologiques considérées désormais prennent leurs valeurs dans des espaces numériques complexes.

Soit $X$ une variété topologique.

On dit que deux cartes de $X$ sont *holomorphiquement compatibles* si les changements de cartes sont holomorphes.

On appelle *atlas holomorphe de* $X$ tout ensemble de cartes deux à deux holomorphiquement compatibles dont les domaines recouvrent $X$. On dit que deux atlas holomorphes sont *compatibles* si leur réunion est un atlas holomorphe. On vérifie aisément que cette relation est une relation d'équivalence. Ses classes s'appellent les *structures holomorphes de* $X$.

On appelle *variété holomorphe* toute variété topologique munie d'une structure holomorphe.

Soit $X$ une variété holomorphe.

On appelle (abusivement) *atlas de* $X$ tout atlas holomorphe appartenant à la structure holomorphe de $X$ et *carte de* $X$ toute carte appartenant à un atlas de $X$.

Soit $x$ un point de $X$. Toutes les cartes de $X$ dont le domaine contient $x$ prennent leurs valeurs dans le même espace numérique complexe. La dimension de cet espace s'appelle la *dimension de* $X$ *au point* $x$ et se désigne par $\dim_x(X)$. La fonction $\dim(X)$ est localement constante. On dit que $X$ est de *dimension pure* si elle est constante.

On appelle *courbe holomorphe* (resp. *surface holomorphe*) toute variété holomorphe de dimension pure 1 (resp. 2).

Les changements de cartes étant en particulier des difféomorphismes, la variété topologique $X$ se trouve naturellement munie d'une structure différentielle que l'on dit *sous-jacente à* $X$. Pour éviter des confusions, on

désigne quelquefois par $X^{\mathbf{R}}$ la variété différentielle obtenue en munissant $X$ de la structure sous-jacente.

Le jacobien des changements de cartes étant toujours positif, la variété différentielle $X^{\mathbf{R}}$ est orientable et munie d'une orientation naturelle.

On dit qu'une application de $X$ dans un espace vectoriel complexe $E$ de dimension finie est *holomorphe* s'il en est ainsi de son expression dans toute carte de $X$ (ou ce qui revient au même dans toute carte d'un atlas de $X$). On désigne par $\mathcal{O}(X, E)$ l'ensemble de ces applications. Si $E$ est égal à $\mathbf{C}$, on utilise aussi la notation $\mathcal{O}(X)$.

Notons que $\mathcal{O}(X)$ est une sous-algèbre de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$ et $\mathcal{O}(X, E)$ un sous-$\mathcal{O}(X)$-module de $\mathscr{C}^\infty(X, E)$. De plus, les topologies induites par $\mathscr{C}^\infty(X, E)$ et $L^1_{\mathrm{loc}}(X, E)$ sur $\mathcal{O}(X, E)$ coïncident (§ 1, proposition 1, corollaire 3). Pour cette topologie, l'espace $\mathcal{O}(X, E)$ est complet. C'est un espace de Fréchet si $X$ est dénombrable à l'infini.

On dit qu'une application continue $u$ de $X$ dans une variété holomorphe $Y$ est *holomorphe* s'il en est ainsi de son expression dans tout couple de cartes. On désigne par $\mathcal{O}(X, Y)$ l'ensemble de ces applications.

On dit que l'application $u$ est un *isomorphisme* si elle est bijective et si $u$ et $u^{-1}$ sont holomorphes.

Les variétés holomorphes, les applications holomorphes et leur composition forment une catégorie. Le lemme suivant est une conséquence immédiate des définitions.

LEMME 1. *Pour qu'une application continue $u$ de $X$ dans $Y$ soit holomorphe, il faut et il suffit que l'application $u^*$ envoie $\mathcal{O}(V)$ dans $\mathcal{O}(u^{-1}(V))$ pour tout ensemble ouvert $V$ de $Y$.*

Les exemples donnés au paragraphe 1 du chapitre 0 fournissent *mutatis mutandis* des exemples de variétés holomorphes. En particulier, pour tout entier naturel $n$, on construit comme dans l'exemple 5 l'*espace projectif complexe* $\mathbf{P}^n$ *de dimension* $n$.

Soit $X$ une variété holomorphe et soit $\pi$ une application de but $X$.

On dit que deux cartes complexes de $\pi$ sont *holomorphiquement compatibles* si la transition est holomorphe.

On appelle *atlas holomorphe de* $\pi$ tout ensemble de cartes complexes deux à deux holomorphiquement compatibles dont les domaines recouvrent $X$. On dit que deux atlas holomorphes sont *compatibles* si leur réunion est un atlas holomorphe. On vérifie aisément que cette relation est une relation d'équivalence. Ses classes s'appellent les *structures vectorielles holomorphes de* $\pi$.

On appelle *fibré vectoriel holomorphe sur* $X$ toute application de but $X$ munie d'une structure vectorielle holomorphe.

Soit $\pi$ un fibré vectoriel holomorphe sur $X$.

On appelle (abusivement) *atlas de* $\pi$ tout atlas holomorphe appartenant à la structure vectorielle holomorphe de $\pi$ et *carte de* $\pi$ toute carte appartenant à un atlas de $\pi$.

On notera que la source $\tau(\pi)$ de $\pi$ est naturellement munie d'une structure holomorphe (chap. 0, § 2).

Les transitions étant en particulier indéfiniment dérivables, l'application $\pi$ est de manière naturelle un fibré vectoriel complexe sur $X^{\mathbf{R}}$. Pour éviter des confusions, nous dirons qu'un fibré vectoriel complexe sur $X^{\mathbf{R}}$ est un *fibré vectoriel différentiel sur* $X$.

On dit qu'une section de $\pi$ est *holomorphe* s'il en est ainsi de son expression dans toute carte de $\pi$ (ou ce qui revient au même dans toute carte d'un atlas de $\pi$ ou encore si c'est une application holomorphe de $X$ dans $\tau(\pi)$). On désigne par $\mathcal{O}(X, \pi)$ l'ensemble de ces sections.

Remarquons que $\mathcal{O}(X, \pi)$ est un sous-$\mathcal{O}(X)$-module de $\mathscr{C}^\infty(X, \pi)$. De plus, les topologies induites par $\mathscr{C}^\infty(X, \pi)$ et $L^1_{\mathrm{loc}}(X, \pi)$ sur $\mathcal{O}(X, \pi)$ coïncident. Pour cette topologie, l'espace $\mathcal{O}(X, \pi)$ est complet. C'est un espace de Fréchet si $X$ est dénombrable à l'infini.

Si $\rho$ est un second fibré vectoriel holomorphe sur $X$, on désigne par $\mathcal{O}(\pi, \rho)$ l'ensemble des morphismes holomorphes de $\pi$ dans $\rho$ (i.e. les applications holomorphes $u$ de $\tau(\pi)$ dans $\tau(\rho)$ telles que

$$\rho \cdot u = \pi ,$$

qui induisent des applications $\mathbf{C}$-linéaires sur les fibres).

Les exemples et les constructions donnés au paragraphe 2 du chapitre 0 fournissent *mutatis mutandis* des exemples et des constructions de fibrés vectoriels holomorphes. En particulier, si $\pi$ et $\rho$ sont des fibrés vectoriels holomorphes sur $X$, il en est de même des fibrés vectoriels $\pi \oplus \rho, \pi \otimes \rho, \pi^*$ et $\Lambda\pi$.

Soit $\mathscr{U}$ un recouvrement ouvert de $X$. On dit qu'un cocycle de rang $p$ subordonné à $\mathscr{U}$ est *holomorphe* si les applications qui le composent sont holomorphes. On définit de la même manière la relation de cobordance entre cocycles holomorphes, d'où un ensemble $\mathrm{Pic}\big(X, G(p; \mathbf{C})\big)$ dont les éléments s'appellent les *fibrés principaux holomorphes de groupe structural* $G(p; \mathbf{C})$ *sur* $X$.

Les classes d'isomorphie de fibrés vectoriels holomorphes de rang $p$ sont en correspondance biunivoque avec les fibrés principaux holomorphes de groupe structural $G(p; \mathbf{C})$.

On prendra garde de distinguer $\mathrm{Pic}(X, G(p; \mathbf{C}))$ et $\mathrm{Pic}(X^{\mathbf{R}}, G(p; \mathbf{C}))$: un fibré vectoriel holomorphe différentiablement trivial n'est pas nécessairement holomorphiquement trivial (chap. IV, § 7).

Soit $X$ une variété holomorphe de dimension pure $n$.

Le fibré cotangent complexe $\Omega^1_{\mathbf{C}}$ à $X^{\mathbf{R}}$ est un fibré vectoriel différentiel de rang $2n$ sur $X$. Pour toute carte $\phi$ de domaine $U$ dans $X$ et pour tout point $x$ de $U$, on a un isomorphisme $\mathbf{C}$-linéaire

$$\varepsilon_{x,\phi} : \Omega^1_{\mathbf{C},X} \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}) .$$

(chap. 0, § 3, lemme 1). Il résulte de la définition même des applications holomorphes que les sous-espaces $\Omega^{1,0}_x$ et $\Omega^{0,1}_x$ de $\Omega^1_{\mathbf{C},x}$ images réciproques par $\varepsilon_{x,\phi}$ des sous-espaces $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}^n, \mathbf{C})$ et $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathbf{C}}}(\mathbf{C}^n, \mathbf{C})$ de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\mathbf{C}^n, \mathbf{C})$ sont indépendants de $\phi$.

Pour toute fonction $f$ de $\mathscr{C}^k(X, \mathbf{C})$, avec $k$ au moins égal à 1, on définit des fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial \phi_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial \phi_n}, \dfrac{\partial f}{\partial \overline{\phi}_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial \overline{\phi}_n}$ de $\mathscr{C}^{k-1}(U, \mathbf{C})$ en posant

$$\frac{\partial f}{\partial \phi_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial \phi'_j} - i\,\frac{\partial f}{\partial \phi''_j}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{\phi}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial \phi'_j} + i\,\frac{\partial f}{\partial \phi''_j}\right)$$

où $\phi'_j$ et $\phi''_j$ désignent les parties réelle et imaginaire de $\phi_j$. Le lemme suivant est une conséquence immédiate de ces définitions (chap. 0, § 3, lemme 5).

LEMME 2. *Pour toute carte $\phi$ de $X$ et tout point $x$ du domaine de $\phi$, les différentielles des germes $\phi_{1,x}, \ldots, \phi_{n,x}$ (resp. $\overline{\phi}_{1,x}, \ldots, \overline{\phi}_{n,x}$) forment une base de $\Omega^{1,0}_x$ (resp. $\Omega^{0,1}_x$). Pour tout germe $f$ de $A^1_x$, on a*

$$df = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial f}{\partial \phi_j}(x)\, d\phi_{j,x} + \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial f}{\partial \overline{\phi}_j}(x)\, d\overline{\phi}_{j,x} .$$

Soit $\pi$ la projection canonique de $\coprod_{x \in X} \Omega^{1,0}_x$ sur $X$ et soient $\phi$ et $\psi$ des cartes de domaines respectifs $U$ et $V$ dans $X$. Le lemme 2 montre que les applications

$$\tilde{\phi}' : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}) \quad \text{et} \quad \tilde{\psi}' : \pi^{-1}(V) \to V \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}^n, \mathbf{C})$$

définies par

$$\tilde{\phi}'(x, y) = (x, \varepsilon_{x,\phi}(y)') \quad \text{et} \quad \tilde{\psi}'(x, y) = (x, \varepsilon_{x,\psi}(y)')$$

(on utilise les notations du paragraphe 1) sont des cartes complexes de $\pi$.

Ces cartes sont holomorphiquement compatibles, la transition est donnée par la formule

$$g(x) = {}^t(D\gamma(\phi(x))')^{-1} = {}^tD\gamma(\phi(x))^{-1}$$

où $\gamma$ désigne le changement de cartes de $\phi$ dans $\psi$.

Le fibré vectoriel holomorphe ainsi défini se désigne par $\Omega^{1,0}$. On l'appelle parfois le *fibré cotangent holomorphe à* $X$.

Soit $\rho$ la projection canonique de $\coprod_{x \in X} \Omega_x^{0,1}$ sur $X$. Le lemme 2 montre que les applications

$$\tilde{\phi}'' : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}) \quad \text{et} \quad \tilde{\psi}'' : \pi^{-1}(V) \to V \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}^n, \mathbf{C})$$

définies par

$$\tilde{\phi}''(x, y) = (x, \varepsilon_{x,\phi}(y)'') \quad \text{et} \quad \tilde{\psi}''(x, y) = (x, \varepsilon_{x,\psi}(y)'')$$

sont des cartes complexes de $\rho$. Ces cartes sont (différentiablement) compatibles, la transition est donnée par la formule

$$g(x) = {}^t\overline{D\gamma(\phi(x))}^{-1}$$

Le fibré vectoriel différentiel ainsi défini se désigne par $\Omega^{0,1}$. Notons que l'on a un isomorphisme canonique

$$\Omega_{\mathbf{C}}^1 = \Omega^{1,0} \oplus \Omega^{0,1}$$

Pour tout couple $(p, q)$ d'entiers, on pose

$$\Omega^{p,q} = \Lambda^p \Omega^{1,0} \oplus \Lambda^q \Omega^{0,1} .$$

On dit qu'une forme différentielle est *homogène de bidegré* $(p, q)$ si elle prend ses valeurs dans $\Omega^{p,q}$. La restriction à $U$ de toute forme différentielle homogène de bidegré $(p, q)$ s'écrit d'une manière et d'une seule

$$u \mid_U = \sum_{J \in S_p(n)} \sum_{K \in S_q(n)} u_{J,K}\, d\phi_J \wedge d\overline{\phi}_K$$

où l'on a posé

$$d\phi_J = d\phi_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\phi_{j_p} \quad \text{et} \quad d\overline{\phi}_K = d\overline{\phi}_{k_1} \wedge \ldots \wedge d\overline{\phi}_{k_q} .$$

LEMME 3. *La différentielle de toute forme de* $\mathscr{C}^1(X, \Omega^{p,q})$ *appartient à*

$$\mathscr{C}^0(X, \Omega^{p+1,q}) \oplus \mathscr{C}^0(X, \Omega^{p,q+1}) .$$

On peut supposer que $X$ est un ensemble ouvert de $\mathbf{C}^n$. L'assertion résulte alors des définitions.

Pour toute forme différentielle $u$ de $\mathscr{C}^1(X, \Omega^{p,q})$, on désigne par $d'u$ (resp. $d''u$) la composante homogène de bidegré $(p+1, q)$ (resp. $(p, q+1)$) de $du$. Le lemme suivant est laissé en exercice au lecteur (chap. 0, § 3, théorème 1).

LEMME 4. *Pour qu'une forme différentielle $u$ de $\mathscr{C}^1(X, \Omega^{p,0})$ soit holomorphe, il faut et il suffit que $d''u$ soit nul.*

*Pour toute forme différentielle $u$ de $\mathscr{C}^2(X, \Omega_{\mathbf{C}})$, on a*

$$d'(d'u) = 0 \qquad d'(d''u) + d''(d'u) = 0 \qquad d''(d''u) = 0 .$$

*Pour tout couple $(u, v)$ de formes différentielles dans $\mathscr{C}^1(X, \Omega_{\mathbf{C}})$, avec $u$ homogène de degré $r$, on a*

$$d'(u \wedge v) = d'u \wedge v + (-1)^r u \wedge d'v$$

*et*

$$d''(u \wedge v) = d''u \wedge v + (-1)^r u \wedge d''v .$$

*En particulier, l'application $d''$ de $\mathscr{C}^1(X, \Omega_{\mathbf{C}})$ dans $\mathscr{C}^0(X, \Omega_{\mathbf{C}})$ est $\mathcal{O}(X)$-linéaire.*

Soit $h$ une application holomorphe de $X$ dans une variété holomorphe $Y$ de dimension pure $m$. Désignons par $\phi$ une carte de domaine $U$ dans $X$ et par $\psi$ une carte de domaine $V$ contenant $h(U)$ dans $Y$. On a par définition

$$h^*(d\psi_j) = d(\psi_j \cdot h) = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\partial(\psi_j \cdot h)}{\partial \phi_k} d\phi_k$$

et

$$h^*(d\overline{\psi}_j) = d(\overline{\psi}_j \cdot h) = \sum_{1 \leq k \leq n} \overline{\frac{\partial(\psi_j \cdot h)}{\partial \phi_k}} d\overline{\phi}_k$$

pour tout entier $j$ compris entre 1 et $m$. On en déduit aisément que l'image réciproque par $h$ d'une forme homogène de bidegré $(p, q)$ est une forme homogène de bidegré $(p, q)$ et que l'on a

$$d'h^*(u) = h^*(d'u) \qquad \text{et} \qquad d''h^*(u) = h^*(d''u)$$

pour toute forme différentielle $u$ de $\mathscr{C}^1(Y, \Omega_{\mathbf{C}})$.

Soit $\pi$ un fibré vectoriel holomorphe de rang pur $m$ sur $X$ et soient $\Phi$ et $\Psi$ des cartes de $\pi$ de domaines respectifs $U$ et $V$. Pour toute section $s$ de $\mathscr{C}^1(X, \pi \otimes \Omega^{p,q})$, on a

$$s_\Phi = (u_1, \ldots, u_m) \qquad \text{et} \qquad s_\Psi = (v_1, \ldots v_m)$$

où les $u_j$ et les $v_j$ sont des formes différentielles homogènes de bidegré $(p, q)$. Pour tout entier $j$ compris entre 1 et $m$, on a

$$v_j = \sum_{1 \leq k \leq m} g_{jk} u_k$$

où $(g_{jk})_{1 \leq j,k \leq m}$ désigne la transition de $\Phi$ dans $\Psi$. On en déduit que

$$d'' v_j = \sum_{1 \leq k \leq m} g_{jk} d'' u_k .$$

Autrement dit, les $m$-uples $(d''u_1, \ldots, d''u_m)$ et $(d''v_1, \ldots, d''v_m)$ se recollent en une section de $\mathscr{C}^0 (X, \pi \otimes \Omega^{p,q+1})$ que l'on désigne encore par $d''s$.

Le lemme suivant est une conséquence immédiate de cette définition et du lemme 4.

LEMME 5. *Pour qu'une section $s$ de $\mathscr{C}^1 (X, \pi)$ soit holomorphe, il faut et il suffit que $d''s$ soit nul.*

*Pour toute section $s$ de $\mathscr{C}^2 (X, \pi \otimes \Omega_{\mathbf{C}})$, on a*

$$d'' (d'' s) = 0 .$$

*Pour toute forme différentielle $u$ de $\mathscr{C}^1 (X, \Omega^r_{\mathbf{C}})$ et toute section $v$ de $\mathscr{C}^1 (X, \pi \otimes \Omega_{\mathbf{C}})$, on a*

$$d'' (u \wedge v) = d'' u \wedge v + (-1)^r u \wedge d'' v .$$

*Pour toute section $u$ de $\mathscr{C}^1 (X, \pi \otimes \Omega^r_{\mathbf{C}})$ et toute section $v$ de $\mathscr{C}^1 (X, \pi^* \otimes \Omega_{\mathbf{C}})$, on a*

$$d'' (u, v) = (d'' u, v) + (-1)^r (u, d'' v) .$$

On appelle *complexe de Dolbeault de* $\pi$ la suite d'espaces vectoriels et d'applications linéaires

$$0 \to \mathscr{C}^\infty (X, \pi) \xrightarrow{d''^0} \mathscr{C}^\infty (X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) \xrightarrow{d''^1} \ldots \xrightarrow{d''^{n-1}} \mathscr{C}^\infty (X, \pi \otimes \Omega^{0,n}) \to 0$$

où $d''^r$ désigne la restriction de $d''$ à $\mathscr{C}^\infty (X, \pi \otimes \Omega^{0,r})$. On appelle *groupes de cohomologie de* $\pi$ les espaces vectoriels

$$\mathbf{H}^r (X, \pi) = \operatorname{Ker} d''^r / \operatorname{Im} d''^{r-1} .$$

La différentielle $d''$ diminuant les supports, on a une deuxième suite

$$0 \to \mathscr{C}^\infty_c (X, \pi) \xrightarrow{d''^0_c} \mathscr{C}^\infty_c (X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) \xrightarrow{d''^1_c} \ldots \xrightarrow{d''^{n-1}_c} \mathscr{C}^\infty_c (X, \pi \otimes \Omega^{0,n}) \to 0$$

et des groupes de cohomologie

$$\mathbf{H}^r_c (X, \pi) = \operatorname{Ker} d''^r_c / \operatorname{Im} d''^{r-1}_c .$$

Le noyau de $d''^0$ s'identifie aux sections holomorphes de $\pi$. On a donc

$$\mathbf{H}^0 (X, \pi) = \mathcal{O} (X, \pi)$$

et si $X$ est ouverte, l'espace vectoriel $\mathbf{H}_c^0(X, \pi)$ est nul (principe du prolongement analytique).

On prendra garde de ne pas confondre le groupe de cohomologie de de Rham $\mathbf{H}^r(X, \mathbf{C})$ de la variété différentielle $X^{\mathbf{R}}$ (chap. 0, § 4) et le groupe de cohomologie de Dolbeault $\mathbf{H}^r(X, \mathbf{C}_X)$ du fibré produit $\mathbf{C}_X$.

## § 3. Fonctions méromorphes

Dans tout ce paragraphe, on désigne par $X$ une variété holomorphe et par $\pi$ un fibré vectoriel holomorphe sur $X$.

Lemme 1. *On suppose $X$ connexe et l'on désigne par $f$ une fonction holomorphe non identiquement nulle sur $X$. L'ensemble $V$ défini par*

$$V = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$$

*est alors connexe et dense dans $X$.*

Il suffit de montrer que tout point $x_0$ de $X$ possède un voisinage $U$ tel que $V \cap U$ soit connexe et dense dans $U$.

On peut donc supposer que $X$ est un ensemble ouvert de $\mathbf{C}^n$ et, par un changement linéaire affine de coordonnées, on peut également supposer que $x_0$ est l'origine et que la fonction partielle $f(0, \ldots, 0, z_n)$ n'est pas identiquement nulle au voisinage de 0. Désignons par $D''$ un disque fermé de centre 0 dans $\mathbf{C}$ tel que $f(0, \ldots, 0, z_n)$ soit holomorphe au voisinage de $D''$ et ne s'annule pas sur $\partial D''$ (§ 1, théorème 1, corollaire 3). Par continuité, il existe un nombre réel $\varepsilon$ strictement positif tel que $f$ soit holomorphe au voisinage de $D' \times D''$ et ne s'annule pas sur $D' \times \partial D''$, en désignant par $D'$ le polydisque de $\mathbf{C}^{n-1}$ défini par

$$D' = \{(z_1, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbf{C}^{n-1} \mid \max_{1 \leq j \leq n-1} |z_j| \leqslant \varepsilon\}.$$

L'ensemble $V \cap (D' \times D'')$ est connexe et dense dans $D' \times D''$ comme il résulte aussitôt de la formule

$$V \cap (D' \times D'')$$
$$= (D' \times \partial D'') \cup \bigcup_{(z_1, \ldots, z_{n-1}) \in D'} \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n \mid f(z_1, \ldots, z_n) \neq 0\}.$$

Pour tout point $x$ de $X$, l'anneau $\mathcal{O}_x$ des germes en $x$ de fonctions holomorphes est intègre (§ 1, proposition 1, corollaire 2) et l'ensemble $\mathcal{O}(\pi)_x$