Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 21 (1975)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: INTRODUCTION A LA THÉORIE DES SURFACES DE RIEMANN
Autor: Guenot, J. / Narasimhan, R.
Kapitel: §2. Dualité
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-47334

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 08.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

§ 2. Dualité

On désigne toujours par X une courbe holomorphe et par π un fibré vectoriel holomorphe sur X.

Rappelons que l'on a deux dualités canoniques d'espaces vectoriels topologiques (chap. 0, § 4, exemple 1)

$$\Delta\colon\ L^2_c(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) \times L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0}) \to \mathbf{C}$$

et

$$\Delta\colon\ L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) \times L^2_c(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0}) \to \mathbf{C}\,.$$

L'ensemble des sections holomorphes (resp. holomorphes à support compact) de $\pi^* \otimes \Omega^{1,0}$ s'identifie à un sous-espace fermé de $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$ (resp. $L^2_c(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$).

Proposition 1. *Pour qu'une section u de $L^2_c(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ (resp. $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$) soit adhérente à l'image de l'opérateur*

$$d''\colon\ H^1_c(X, \pi) \to L^2_c(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$
$$(\textit{resp. } d''\colon\ H^1_{\mathrm{loc}}(X, \pi) \to L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}))$$

il faut et il suffit qu'elle soit Δ — orthogonale au sous-espace $\mathcal{O}(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$ (resp. $\mathcal{O}_c(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$).

Pour toute section h de $H^1_c(X, \pi)$ et toute section v de $\mathcal{O}(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$, on a

$$\Delta(d''h, v) = \int_X (d''h, v) = -\int_X (h, d''v) = 0\,,$$

ce qui montre la nécessité de la condition puisque la forme bilinéaire Δ est séparément continue.

Réciproquement, désignons par α une forme linéaire continue sur $L^2_c(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ nulle sur l'image de d''. Par dualité, il existe une section v de $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$ telle que

$$\Delta(\ \ , v) = \alpha\,.$$

En particulier, pour toute section h de $\mathscr{C}^\infty_c(X, \pi)$, on a

$$\Delta(d''h, v) = \int_X (d''h, v) = \alpha(d''h) = 0\,.$$

Il résulte alors du théorème de régularité (§ 1, théorème 2, corollaire) que v est holomorphe et l'on a

$$\alpha(u) = \Delta(u, v) = 0\,.$$

On conclut à l'aide du théorème de Hahn-Banach.

THÉORÈME 1. *Par restriction et passage au quotient, les bijections canoniques*

$$\Delta_1 \colon L_c^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) \to L_{\mathrm{loc}}^2(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})'$$

et

$$\Delta_2 \colon L_{\mathrm{loc}}^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) \to L_c^2(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})'$$

induisent des bijections

$$\tilde{\Delta}_1 \colon L_c^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})/\overline{\mathrm{Im}\, d''} \to \mathcal{O}(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})'$$

et

$$\tilde{\Delta}_2 \colon L_{\mathrm{loc}}^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})/\overline{\mathrm{Im}\, d''} \to \mathcal{O}_c(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})' .$$

Il résulte de la proposition 1 que les applications $\tilde{\Delta}_1$ et $\tilde{\Delta}_2$ sont bien définies et injectives. Le théorème de Hahn-Banach montre qu'elles sont surjectives.

COROLLAIRE (Théorème de dualité). *(1) Si l'image de l'opérateur*

$$d'' \colon H_c^1(X, \pi) \to L_c^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

est fermée, les espaces vectoriels $\mathbf{H}_c^1(X, \pi)$ *et* $\mathbf{H}^0(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})'$ *sont canoniquement isomorphes.*

(2) Si l'image de l'opérateur

$$d'' \colon H_{\mathrm{loc}}^1(X, \pi) \to L_{\mathrm{loc}}^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

est fermée, les espaces vectoriels $\mathbf{H}^1(X, \pi)$ *et* $\mathbf{H}_c^0(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})'$ *sont canoniquement isomorphes.*

Remarque 1.

Il résulte aisément du théorème du graphe fermé que les applications $\tilde{\Delta}_1$ et $\tilde{\Delta}_2$ du théorème 1 sont des isomorphismes.

PROPOSITION 2. *Pour toute partie compacte* K *de* X, *l'opérateur*

$$d'' \colon H_K^1(X, \pi) \to L_K^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

a une image fermée et un noyau de dimension finie.

Désignons par j l'injection canonique de $H_K^1(X, \pi)$ dans $L_K^2(X, \pi)$ et considérons les applications linéaires continues

$$H_K^1(X, \pi) \underset{(-j,0)}{\overset{(j,d'')}{\rightrightarrows}} L_K^2(X, \pi) \oplus L_K^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

L'application (j, d'') est injective d'image fermée (§ 1, remarque 3). L'application $(-j, 0)$ est un opérateur compact en vertu du lemme de Rellich

(chap. II, § 2, théorème 2). L'assertion est alors une conséquence immédiate d'un résultat classique sur les opérateurs compacts ([2], théorème (11.3.2) et problème (11.3.2)).

COROLLAIRE (Théorème de finitude). *Si la courbe holomorphe X est compacte, l'image de l'opérateur*

$$d'': H^1(X, \pi) \to L^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

est fermée. Les espaces $\mathbf{H}^1(X, \pi)$ *et* $\mathbf{H}^0(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})'$ *sont alors canoniquement isomorphes et les espaces* $\mathbf{H}^0(X, \pi)$ *et* $\mathbf{H}^1(X, \pi)$ *sont de dimension finie.*

C'est une conséquence immédiate de la proposition 2 et du théorème de dualité.

§ 3. LE CAS DU LAPLACIEN

Dans ce paragraphe, nous allons étudier l'opérateur différentiel

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right).$$

Soit X un ensemble ouvert de $\mathbf{C}$. On dit qu'une fonction u de $\mathscr{C}^2(X, \mathbf{C})$ est *harmonique* si elle vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) = 0 .$$

Il résulte de cette définition que u est harmonique si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont harmoniques.

On désigne par $\mathscr{H}(X, \mathbf{k})$ (avec $\mathbf{k}$ égal à $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) l'ensemble des fonctions harmoniques sur X à valeurs dans $\mathbf{k}$.

Remarquons que $\mathscr{H}(X, \mathbf{k})$ est une sous-algèbre fermée de $\mathscr{C}^2(X, \mathbf{k})$.

PROPOSITION 1. *Supposons X simplement connexe. Pour qu'une fonction u de $\mathscr{C}^2(X, \mathbf{R})$ soit harmonique, il faut et il suffit qu'elle soit la partie réelle d'une fonction holomorphe.*

La suffisance résulte de ce qui précède. Si u est harmonique, la forme différentielle $\frac{\partial u}{\partial z} dz$ est holomorphe, donc fermée. Il existe par conséquent une fonction holomorphe h sur X telle que

$$\frac{1}{2} dh = \frac{\partial u}{\partial z} dz$$