§3. Le cas du Laplacien

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

(chap. II, § 2, théorème 2). L'assertion est alors une conséquence immédiate d'un résultat classique sur les opérateurs compacts ([2], théorème (11.3.2) et problème (11.3.2)).

COROLLAIRE (Théorème de finitude). *Si la courbe holomorphe X est compacte, l'image de l'opérateur*

$$d'': H^1(X, \pi) \to L^2(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

est fermée. Les espaces $\mathbf{H}^1(X, \pi)$ *et* $\mathbf{H}^0(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})'$ *sont alors canoniquement isomorphes et les espaces* $\mathbf{H}^0(X, \pi)$ *et* $\mathbf{H}^1(X, \pi)$ *sont de dimension finie.*

C'est une conséquence immédiate de la proposition 2 et du théorème de dualité.

§ 3. LE CAS DU LAPLACIEN

Dans ce paragraphe, nous allons étudier l'opérateur différentiel

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right).$$

Soit X un ensemble ouvert de $\mathbf{C}$. On dit qu'une fonction u de $\mathscr{C}^2(X, \mathbf{C})$ est *harmonique* si elle vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) = 0 .$$

Il résulte de cette définition que u est harmonique si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont harmoniques.

On désigne par $\mathscr{H}(X, \mathbf{k})$ (avec $\mathbf{k}$ égal à $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) l'ensemble des fonctions harmoniques sur X à valeurs dans $\mathbf{k}$.

Remarquons que $\mathscr{H}(X, \mathbf{k})$ est une sous-algèbre fermée de $\mathscr{C}^2(X, \mathbf{k})$.

PROPOSITION 1. *Supposons X simplement connexe. Pour qu'une fonction u de $\mathscr{C}^2(X, \mathbf{R})$ soit harmonique, il faut et il suffit qu'elle soit la partie réelle d'une fonction holomorphe.*

La suffisance résulte de ce qui précède. Si u est harmonique, la forme différentielle $\frac{\partial u}{\partial z} dz$ est holomorphe, donc fermée. Il existe par conséquent une fonction holomorphe h sur X telle que

$$\frac{1}{2} dh = \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

(chap. 0, § 5, théorème 1, corollaire 1). On en déduit que

$$\frac{1}{2}\, d\,(h+\bar{h}) = \frac{\partial u}{\partial z}\, dz + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\, d\bar{z} = du$$

ce qui démontre l'assertion.

COROLLAIRE 1 (Principe du prolongement analytique). *Soit u une fonction harmonique sur un ensemble ouvert connexe X de* **C**. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) La fonction u est identiquement nulle.

(2) Il existe un point de X ou le germe de u est nul.

(3) Il existe un point de X où toutes les dérivées partielles de u sont nulles.

Il suffit de montrer que (3) implique (1). On peut supposer u à valeurs réelles. On désigne par ζ un point de X où toutes les dérivées partielles de u sont nulles et par h une fonction holomorphe telle que

$$u = \mathrm{Re}\,(h) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial z}$$

au voisinage de ζ. On en déduit que h est constante, purement imaginaire, et que u est nulle au voisinage de ζ, ce qui établit l'assertion.

COROLLAIRE 2 (Propriété de la moyenne). *Soit u une fonction harmonique sur un ensemble ouvert X de* **C** *et soit D un disque de centre ζ relativement compact dans X. On a*

$$u\,(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} u\,(z)\, dz\ .$$

On peut supposer u à valeurs réelles. L'assertion est alors une conséquence immédiate de la proposition 1 et de la formule de Cauchy (chap. I, § 1, théorème 1, corollaire 1).

COROLLAIRE 3. *Pour tout ensemble ouvert X de* **C**, *les topologies induites sur $\mathscr{H}\,(X, \mathbf{k})$ par $L^1_{\mathrm{loc}}\,(X, \mathbf{k})$ et $\mathscr{C}^\infty\,(X, \mathbf{k})$ coïncident.*

La démonstration est analogue à celle du théorème de Weierstrass (chap. I, § 1, théorème 1, corollaire 4).

COROLLAIRE 4 (Principe du maximum). *Soit u une fonction harmonique sur un ensemble ouvert connexe X de* **C**. *Si u possède un maximum relatif en un point ζ de X, elle est constante.*

En vertu du principe du prolongement analytique, il suffit de montrer que u est constante au voisinage de ζ. Quitte à multiplier u par une constante convenable, on peut supposer $u(\zeta)$ réel positif. Pour r suffisamment petit, on a par hypothèse

$$M(r) = \sup_{|z-\zeta|=r} |u(z)| \leqslant u(\zeta).$$

Réciproquement, la propriété de moyenne montre que $u(\zeta)$ est majoré par $M(r)$. Ceci montre que la fonction g définie par

$$g(z) = \mathrm{Re}\big(u(\zeta) - u(z)\big)$$

est réelle positive. Elle s'annule en un point z si et seulement si $u(z)$ est égal à $u(\zeta)$. On conclut en remarquant que l'intégrale de g sur le bord du disque de centre ζ et de rayon r est nulle.

LEMME 1. *Soit l la fonction définie sur $\mathbf{C}^*$ par la formule*

$$l(z) = \frac{1}{\pi} \log |z|^2 .$$

(1) La fonction l appartient à $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{C}, \mathbf{C})$.

(2) La fonction l est faiblement dérivable d'ordre $(1, 0)$ et $(0, 1)$. On a

$$\frac{\partial l}{\partial z} = \frac{1}{\pi z} \quad \textit{et} \quad \frac{\partial l}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{\pi \bar{z}} .$$

La première assertion découle d'un calcul élémentaire en coordonnées polaires. Démontrons la seconde. Pour toute fonction h de $\mathscr{C}^\infty_c(\mathbf{C}, \mathbf{C})$, on a

$$\int_{\mathbf{C}} kh \, d\mu = -\frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbf{C} \setminus D_\varepsilon} \frac{\partial l}{\partial z} h \, dz \wedge d\bar{z}$$

(on utilise les notations du paragraphe 1). La formule de Stokes montre alors que l'on a

$$\int_{\mathbf{C}} kh \, d\mu = \frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial D_\varepsilon} lh \, d\bar{z} + \frac{1}{2i} \int_{\mathbf{C}} l \frac{\partial h}{\partial z} dz \wedge d\bar{z} .$$

On conclut en remarquant que l'on a

$$\frac{1}{2i} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial D_\varepsilon} lh \, d\bar{z} = 0 .$$

L'autre assertion se démontre de la même manière.

Désignons par D le disque de centre 0 et de rayon r dans $\mathbf{C}$ et par α une fonction de $\mathscr{C}_c^\infty$ (D, $\mathbf{R}$) égale à 1 au voisinage de 0. On pose

$$\alpha' = \frac{\partial \alpha}{\partial z} \qquad \alpha'' = \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{z}} \qquad \beta = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z \partial \bar{z}} .$$

Si X et X' sont des ensembles ouverts de $\mathbf{C}$ tels que X contienne $X' + D$, le produit de convolution induit des applications linéaires continues

$$(\alpha l)*: \ L^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C}) \to \mathscr{C}^0(X', \mathbf{C}) \qquad \text{et} \qquad (\beta l)*: \ L^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C}) \to \mathscr{C}^\infty(X', \mathbf{C})$$

PROPOSITION 2. *Le produit de convolution induit une application linéaire continue*

$$(\alpha l)*: \ L^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C}) \to H^2_{\mathrm{loc}}(X', \mathbf{C})$$

et l'on a

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \big((\alpha l)*u\big) = u\,|_{X'} + (\alpha' \bar{k} + \alpha'' k + \beta l)*u$$

pour toute fonction u *de* $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$.

Il résulte du lemme 1 que l'on a

$$\frac{\partial}{\partial z}\big((\alpha l)*u\big) = (\alpha' l)*u + (\alpha k)*u \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\big((\alpha l)*u\big) = (\alpha'' l)*u + (\alpha \bar{k})*u .$$

La première assertion résulte donc du lemme de Grothendieck. Ce même lemme montre que l'on a

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \big((\alpha l)*u\big) = u\,|_{X'} + (\alpha' \bar{k} + \alpha'' k + \beta l)*u$$

ce qui démontre l'assertion.

Soit X une courbe holomorphe.

On désigne par $\mathscr{H}^0(X)$ et $\mathscr{H}^1(X)$ le noyau et le conoyau de l'application

$$d' \cdot d'' : \ \mathscr{C}(X, \mathbf{C}) \to \mathscr{C}(X, \Omega^{1,1}) ,$$

par $\mathscr{H}^0_c(X)$ et $\mathscr{H}^1_c(X)$ le noyau et le conoyau de l'application

$$d' \cdot d'' : \ \mathscr{C}_c(X, \mathbf{C}) \to \mathscr{C}_c(X, \Omega^{1,1}) .$$

Remarquons que l'ensemble $\mathscr{H}^0(X)$ s'identifie à l'ensemble des fonctions harmoniques sur X (i.e. les fonctions dont l'expression dans toute carte est

harmonique). En particulier, l'espace $\mathscr{H}^0(X)$ est réduit aux fonctions localement constantes si X est compacte (principe du maximum), l'espace $\mathscr{H}^0_c(X)$ est nul si X est ouverte (principe du prolongement analytique).

On peut développer pour l'opérateur $d' \cdot d''$ une théorie semblable à celle développée aux paragraphes précédents pour l'opérateur d''. Nous nous contenterons d'énoncer les résultats: les démonstrations sont laissées en exercice au lecteur.

THÉORÈME 1. *On désigne par u une fonction de $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$ et par m un entier naturel. S'il existe une forme différentielle v de $H^m_{\mathrm{loc}}(X, \Omega^{1,1})$ telle que*

$$\int_X hv = \int_X u\,(d' \cdot d'')(h)$$

pour toute fonction h de $\mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{C})$, alors u appartient à $H^{m+2}_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$.

COROLLAIRE (Théorème de régularité). *On conserve les notations et les hypothèses du théorème 1. Si v est indéfiniment dérivable, il en est de même de u. En particulier, si v est nulle, la fonction u est harmonique.*

On appelle *paramétrix de $d' \cdot d''$* toute application linéaire continue P de $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \Omega^{1,1})$ dans $H^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$ vérifiant les conditions suivantes

(1) Pour toute forme différentielle u de $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \Omega^{1,1})$, la forme différentielle

$$u - (d' \cdot d'' \cdot P)(u)$$

est indéfiniment dérivable.

(2) Si u est à support compact, il en est de même de $P(u)$.

Les propriétés suivantes sont alors des conséquences du théorème de régularité:

(3) Si u est indéfiniment dérivable, il en est de même de $P(u)$.

(4) Pour toute fonction v de $H^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$, la fonction

$$v - (P \cdot d' \cdot d'')(u)$$

est indéfiniment dérivable.

THÉORÈME 2. *L'opérateur $d' \cdot d''$ possède une paramétrix.*

COROLLAIRE. *(1) Par restriction et passage aux quotients, les injections canoniques de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$ et $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{1,1})$ dans $H^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$ et $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \Omega^{1,1})$*

respectivement induisent des bijections de $\mathscr{H}^0(X)$ *et* $\mathscr{H}^1(X)$ *sur le noyau et le conoyau de l'opérateur*

$$d' \cdot d'' : H^1_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C}) \to L^2_{\mathrm{loc}}(X, \Omega^{1,1}) .$$

(2) Par restriction et passage aux quotients, les injections canoniques de $\mathscr{C}^\infty_c(X, \mathbf{C})$ *et* $\mathscr{C}^\infty_c(X, \Omega^{1,1})$ *dans* $H^2_c(X, \mathbf{C})$ *et* $L^2_c(X, \Omega^{1,1})$ *respectivement induisent des bijections de* $\mathscr{H}^0_c(X)$ *et* $\mathscr{H}^1_c(X)$ *sur le noyau et le conoyau de l'opérateur*

$$d' \cdot d'' : H^2_c(X, \mathbf{C}) \to L^2_c(X, \Omega^{1,1}) .$$

Considérons les dualités canoniques d'espaces vectoriels topologiques

$$\Delta : L^2_c(X, \Omega^{1,1}) \times L^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C}) \to \mathbf{C}$$

et

$$\Delta : L^2_{\mathrm{loc}}(X, \Omega^{1,1}) \times L^2_c(X, \mathbf{C}) \to \mathbf{C} .$$

L'ensemble des fonctions harmoniques (resp. harmoniques à support compact) sur X s'identifie à un sous-espace fermé de $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C})$ (resp. $L^2_c(X, \mathbf{C})$).

PROPOSITION 3. *Pour qu'une forme différentielle* u *de* $L^2_c(X, \Omega^{1,1})$ *(resp.* $L^2_{\mathrm{loc}}(X, \Omega^{1,1})$*) soit adhérente à l'image de l'opérateur*

$$d' \cdot d'' : H^2_c(X, \mathbf{C}) \to L^2_c(X, \Omega^{1,1})$$
$$(\textit{resp. } d' \cdot d'' : H^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C}) \to L^2_{\mathrm{loc}}(X, \Omega^{1,1})),$$

il faut et il suffit qu'elle soit Δ*-orthogonale au sous-espace* $\mathscr{H}^0(X)$ *(resp.* $\mathscr{H}^0_c(X)$*).*

THÉORÈME 3 (Théorème de dualité). *(1) Si l'image de l'opérateur*

$$d' \cdot d'' : H^2_c(X, \mathbf{C}) \to L^2_c(X, \Omega^{1,1})$$

est fermée, les espaces vectoriels $\mathscr{H}^1_c(X)$ *et* $\mathscr{H}^0(X)'$ *sont canoniquement isomorphes.*

(2) Si l'image de l'opérateur

$$d' \cdot d'' : H^2_{\mathrm{loc}}(X, \mathbf{C}) \to L^2_{\mathrm{loc}}(X, \Omega^{1,1})$$

est fermée, les espaces vectoriels $\mathscr{H}^1(X)$ *et* $\mathscr{H}^0_c(X)'$ *sont canoniquement isomorphes.*

Remarque 1.

Pour toute partie compacte K de X, l'application

$$(j_1, j_2 \cdot d'', d' \cdot d'') : H_K^2(X, \mathbf{C}) \to L_K^2(X, \mathbf{C}) \oplus L_K^2(X, \Omega^{0,1}) \oplus L_K^2(X, \Omega^{1,1})$$

où j_1 et j_2 désignent les injections canoniques de $H_K^2(X, \mathbf{C})$ dans $L_K^2(X, \mathbf{C})$ et de $H_K^1(X, \Omega^{0,1})$ dans $L_K^2(X, \Omega^{0,1})$ respectivement, est injective d'image fermée (§ 1, lemme 1).

PROPOSITION 4. *Pour toute partie compacte K de X, l'opérateur*

$$d' \cdot d'' : H_K^2(X, \mathbf{C}) \to L_K^2(X, \Omega^{1,1})$$

a une image fermée et un noyau de dimension finie.

En particulier, si X est compacte connexe, l'intégration des formes différentielles de degré 2 induit un isomorphisme de $\mathscr{H}^1(X)$ sur $\mathbf{C}$.