§1. Théorème de Behnke-Stein

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **04.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

CHAPITRE V

COURBES HOLOMORPHES NON COMPACTES

Dans tout ce chapitre, on désigne par X une courbe holomorphe connexe non compacte (dénombrable à l'infini) et par π un fibré vectoriel holomorphe sur X.

§ 1. THÉORÈME DE BEHNKE-STEIN

Pour tout ensemble compact K de X, on désigne par $B_K(X, \pi)$ le sous-espace fermé de $L^2_K(X, \pi)$ défini par

$$B_K(X,\pi) = \{ v \in L^2_K(X,\pi) \mid v|_{\mathring{K}} \text{ est holomorphe} \}$$

(chap. I, § 1, théorème 1, corollaire 4).

LEMME 1. *Considérons la forme bilinéaire*

$$\Delta : L^2_K(X, \pi \otimes \Omega^{0,1}) \times L^2_K(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0}) \to \mathbf{C}\,.$$

Pour qu'une section u de $L^2_K(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ appartienne à l'image de l'opérateur différentiel

$$d'' : H^1_K(X,\pi) \to L^2_K(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$$

il suffit qu'elle soit Δ-orthogonale au sous-espace $B_K(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$.

Désignons par λ une forme linéaire continue sur $L^2_K(X, \pi \otimes \Omega^{0,1})$ nulle sur l'image de d''. Par dualité, il existe une section v de $L^2_K(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$ et une seule telle que

$$\lambda = \Delta(\ , v)\,.$$

En particulier, pour toute section h de $\mathscr{C}^\infty_c(\mathring{K}, \pi)$, on a

$$\Delta(d''h, v) = \lambda(d''h) = 0\,.$$

Le théorème de régularité (chap. III, § 1, théorème 2, corollaire) montre que

v appartient à $B_K(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$ et l'on conclut en remarquant que l'image de d'' est fermée (chap. III, § 2, proposition 2).

LEMME 2. *Soit K_1 un ensemble compact de X dont le complémentaire n'a pas de composante connexe relativement compacte dans X et soit K_2 un voisinage compact de K_1. On désigne par E (resp. F) le sous-espace de $L^2_{K_1}(X, \pi)$ formé des sections de la forme $\chi_{K_1} u$ où u est une section de $B_{K_2}(X, \pi)$ (resp. une section de $\mathscr{C}^\infty_c(X, \pi)$ holomorphe au voisinage de K_1). Alors l'espace E est dense dans l'espace F pour la topologie induite par $L^2_{K_1}(X, \pi)$.*

D'après le théorème de Hahn-Banach, il suffit de montrer que toute forme linéaire λ continue sur $L^2_{K_1}(X, \pi)$ et nulle sur E s'annule sur F. Par dualité, il existe une section v de $L^2_{K_1}(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,1})$ et une seule telle que

$$\lambda = \Delta(\ , v).$$

Montrons que v est dans l'image de l'opérateur différentiel

$$d'' : H^1_{K_2}(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0}) \to L^2_{K_2}(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,1}).$$

Pour cela, il suffit de montrer que v est Δ-orthogonale à $B_{K_2}(X, \pi)$ (lemme 1). Or, pour toute section u de cet espace, on a

$$\Delta(u, v) = \int_X (u, v) = \int_X (\chi_{K_1} u, v) = \lambda(\chi_{K_1} u) = 0.$$

Il existe donc une section w de $H^1_{K_2}(X, \pi^* \otimes \Omega^{1,0})$ telle que

$$v = d'' w.$$

Le théorème de régularité montre que w est holomorphe sur $X \backslash K_1$ et puisque toutes les composantes connexes de $X \backslash K_1$ rencontrent $X \backslash K_2$, le principe du prolongement analytique montre que le support de w est contenu dans K_1.

Pour toute section u de $\mathscr{C}^\infty_c(X, \pi)$ holomorphe au voisinage de K_1, on a

$$\lambda(\chi_{K_1} u) = \int_X (u, v) = \int_X (u, d'' w) = -\int_X (d'' u, w) = 0$$

ce qui démontre le lemme.

THÉORÈME 1 (Behnke-Stein). *Pour tout ensemble ouvert U de X dont le complémentaire n'a pas de composante connexe compacte, l'application de restriction de $\mathcal{O}(X, \pi)$ dans $\mathcal{O}(U, \pi)$ est d'image dense.*

Il faut montrer que pour toute section u de $\mathcal{O}(U, \pi)$, tout ensemble compact K de U et tout nombre réel ε strictement positif, il existe une section v de $\mathcal{O}(X, \pi)$ telle que

$$\| v - u \|_{L^2,K} \leqslant \varepsilon$$

la semi-norme $\| \ \|_{L^2,K}$ étant relative à des métriques hermitiennes sur Ω^1 et π. On peut supposer que le complémentaire de K n'a pas de composante connexe relativement compacte dans X et qu'il existe une suite exhaustive $(K_j)_{j \in \mathbf{N}}$ de parties compactes de X ayant la même propriété, telle que K soit égal à K_0 (appendice II, lemmes 5 et 6). Posons

$$u_0 = \chi_{K_0} u \, .$$

Le lemme 2 montre qu'il existe une section u_1 de $B_{K_2}(X, \pi)$ telle que

$$\| u_1 - u_0 \|_{L^2,K_0} \leqslant \frac{\varepsilon}{2^2} \, .$$

Pour tout entier j strictement positif, on construit de la même manière une section u_j de $B_{K_{j+1}}(X, \pi)$ telle que

$$\| u_j - u_{j-1} \|_{L^2,K_{j-1}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} \, .$$

Pour tout entier n, la suite $(\chi_{K_n} u_j)_{j \geqslant n}$ est une suite de Cauchy dans $B_{K_n}(X, \pi)$. On désigne par v_n sa limite. Il est clair que les sections v_n se recollent en une section v de $\mathcal{O}(X, \pi)$. Il existe un entier n tel que

$$\| v - u_n \|_{L^2,K} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \, .$$

On a alors

$$\| v - u \|_{L^2,K} \leqslant \| v - u_n \|_{L^2,K} + \| u_n - u \|_{L^2,K} \leqslant \varepsilon$$

ce qui démontre l'assertion.

§ 2. Calcul de quelques groupes de cohomologie

Lemme 1. *Pour tout point x de X, il existe une fonction méromorphe h sur X, holomorphe sur $X \backslash \{x\}$ possédant un pôle simple au point x.*

Désignons par ρ un fibré en droites holomorphe sur X et par s une section holomorphe de ρ dont le diviseur est $1 \cdot x$. Il résulte du théorème de