Appendice I

Objekttyp: **Appendix**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **04.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

APPENDICE I

(1) Sur l'existence de certaines fonctions dérivables

LEMME 1. *Il existe une fonction croissante* f *de* $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, *nulle sur* $]-\infty, 0]$, *égale à* 1 *sur* $[1, +\infty[$.

Désignons par g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$\begin{cases} g(x) = \exp(-x^{-2}) & \text{si } x > 0 \\ g(x) = 0 & \text{si } x \leqslant 0 . \end{cases}$$

Il est clair que g est indéfiniment dérivable. Il suffit alors de poser

$$f(x) = \left(\int_{-\infty}^{x} g(t)\, g(1-t)\, dt\right) \Big/ \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, g(1-t)\, dt\right).$$

Ceci a bien un sens puisque $g(t)\, g(1-t)$ est nul si $t \leqslant 0$ ou si $t \geqslant 1$, strictement positif si $0 < t < 1$.

LEMME 2. *Pour tout point* k *de* $\mathbf{Z}^n$ *et tout nombre réel* ε *strictement positif, il existe une fonction* $\alpha_{k,\varepsilon}$ *de* $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, *à valeurs positives, dont le support est contenu dans le cube de côté* 2ε *centré au point* εk *et telle que*

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}^n} \alpha_{k,\varepsilon}(x) = 1$$

pour tout point x *de* $\mathbf{R}^n$.

Désignons par f une fonction vérifiant les conditions du lemme 1. On définit une fonction g de $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ à valeurs positives en posant

$$g(x) = f(x+1) - f(x) .$$

Le support de g est contenu dans l'intervalle $[-1, +1]$ et l'on a

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}} g(x-j) = g(x-j_0) + g(x-j_0-1)$$

pour tout point x de $\mathbf{R}$, en désignant par j_0 la partie entière de x (i.e. le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x). On en déduit que l'on a

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}} g(x-j) = f(x-j_0+1) = 1 .$$

Il suffit alors de poser

$$\alpha_{k,\varepsilon}(x_1, \ldots, x_n) = g\left(\frac{x_1}{\varepsilon} - k_1\right) \ldots g\left(\frac{x_n}{\varepsilon} - k_n\right).$$

LEMME 3. *Pour tout ensemble compact K de $\mathbf{R}^n$ et tout voisinage U de K, il existe une fonction α de $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ à valeurs positives, dont le support est contenu dans U et égale à 1 sur K.*

Munissons $\mathbf{R}^n$ de la norme

$$|(x_1, \ldots, x_n)| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|.$$

Pour tout nombre réel ε strictement positif, l'ensemble

$$K_\varepsilon = \{ x \in \mathbf{R}^n \mid \text{il existe } y \in K \text{ tel que } |x - y| \leqslant \varepsilon \}$$

est compact. Pour ε suffisamment petit, il est contenu dans U. Désignons par A l'ensemble des points k de $\mathbf{Z}^n$ pour lesquels le cube de centre εk et de côté 2ε rencontre K et posons

$$\alpha = \sum_{k \in A} \alpha_{k,\varepsilon}.$$

Cette fonction est indéfiniment dérivable à valeurs positives. D'autre part, on a

$$\operatorname{supp}(\alpha) \subset \bigcup_{k \in A} \operatorname{supp}(\alpha_{k,\varepsilon}) \subset K_\varepsilon$$

et, pour tout point x de K,

$$\alpha(x) = \sum_{k \in A} \alpha_{k,\varepsilon}(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} \alpha_{k,\varepsilon}(x) = 1$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

LEMME 4. *Soit r un nombre réel strictement positif et soit C le cube de côté $2r$ et de centre l'origine dans $\mathbf{R}^n$. Pour tout point a de C, il existe un difféomorphisme u de $\mathbf{R}^n$ sur lui-même tel que*

$$u(0) = a \quad \text{et} \quad u|_{\mathbf{R}^n \setminus C} = 1_{\mathbf{R}^n \setminus C}.$$

On se ramène aisément au cas où n est égal à 1. On désigne par α une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$ dont le support est contenu dans $[0, r]$ telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(t)\, dt = a \quad \text{et} \quad |\alpha| < 1$$

(une telle fonction existe en vertu du lemme 3, car $|a|$ est strictement inférieur à r). Il suffit alors de poser

$$u(x) = x - \int_{-\infty}^{x} (\alpha(t) - \alpha(-t))\, dt.$$

(2) Le théorème des fonctions réciproques

Dans ce numéro, on désigne par $\mathbf{k}$ le corps des nombres réels ou le corps des nombres complexes.

Si $\mathbf{k}$ est égal à $\mathbf{C}$, indéfiniment dérivable signifie donc holomorphe (chap. I, § 1, proposition 1, corollaire 1).

THÉORÈME 1 (Fonctions réciproques). *Soient U et V deux ensembles ouverts de $\mathbf{k}^n$ et soit u une application indéfiniment dérivable de U dans V. On suppose que la dérivée de u au point ξ est bijective. L'application u est alors un difféomorphisme d'un voisinage de ξ sur un voisinage de $u(\xi)$.*

Par des changements linéaires affines de coordonnées, on peut supposer que ξ et $u(\xi)$ coïncident avec l'origine et que la dérivée $Du(0)$ est l'identité. L'application v de U dans $\mathbf{k}^n$ définie par

$$v(x) = u(x) - x$$

est indéfiniment dérivable et a une dérivée nulle à l'origine. Par continuité, il existe donc un cube $C(0, r)$ relativement compact dans U tel que $Du(x)$ soit bijective et tel que

$$|Dv(x)| \leqslant \frac{1}{2n}$$

pour tout point x de $C(0, r)$ (la norme de $Dv(x)$ est par définition le maximum des modules des dérivées partielles de v au point x). Le théorème des accroissements finis montre que l'on a

$$|v(x') - v(x'')| \leqslant \frac{1}{2}|x' - x''|$$

et par conséquent

$$|u(x') - u(x'')| \geqslant \frac{1}{2}|x' - x''|$$

pour tout couple (x', x'') de points de $C(0, r)$. En particulier, la restriction de u à $C(0, r)$ est injective. Par récurrence sur l'entier k, on définit une application continue de $C\left(0, \frac{r}{2}\right)$ dans $C(0, r)$ en posant

$$w_0(y) = 0 \quad \text{et} \quad w_{k+1}(y) = y - v(w_k(y)).$$

Il résulte de ce qui précède que l'on a

$$\begin{aligned} | w_{k+1}(y) - w_k(y) | &= | v(w_k(y)) - v(w_{k-1}(y)) | \\ &\leqslant \frac{1}{2} | w_k(y) - w_{k-1}(y) | \leqslant \frac{r}{2^k} . \end{aligned}$$

Par conséquent la suite $(w_k)_{k \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers une application continue (holomorphe dans le cas complexe, chap. I, § 1, proposition 1, corollaire 3) w de $C\left(0, \frac{r}{2}\right)$ dans $\bar{C}(0, r)$ et l'on a à la limite

$$w(y) = y - v(w(y)) .$$

En particulier, l'application w prend ses valeurs dans $C(0, r)$. Posons

$$V' = C\left(0, \frac{r}{2}\right) \quad \text{et} \quad U' = C(0, r) \cap u^{-1}(V') .$$

Pour tout point y de V', on a

$$u(w(y)) = w(y) + v(w(y)) = y ,$$

en particulier, l'application w envoie V' dans U'. D'autre part, puisque u est injective sur V', on a

$$w(u(x)) = x$$

pour tout point x de U'. Ceci montre que u est un homéomorphisme de U' sur V' et que w est l'homéomorphisme réciproque. Il reste à voir que w est indéfiniment dérivable.

Pour tout couple (x', x) de points de U', on peut écrire

$$u(x') - u(x) = Du(x)(x' - x) + h(x', x) | x' - x |$$

où $h(\ , x)$ est une fonction qui tend vers 0 lorsque x' tend vers x. Pour tout couple (y, y') de points de V', on a donc

$$\begin{aligned} w(y') - w(y) &= Du(w(y))^{-1}(y' - y) \\ &+ Du(w(y))^{-1} h(w(y'), w(y)) | w(y') - w(y) | \end{aligned}$$

Il résulte d'autre part des inégalités ci-dessus que l'on a

$$\frac{h(w(y'), w(y))}{| y' - y |} \leqslant 2 \frac{h(w(y'), w(y))}{| w(y') - w(y) |}$$

ce qui montre que w est dérivable au point y et que sa dérivée est $Du(w(y))^{-1}$. Comme cette dernière application est continue, on voit que w

est continûment dérivable, puis, par récurrence, qu'elle est indéfiniment dérivable.

THÉORÈME 2 (Théorème du rang). *Soient U et V deux ensembles ouverts de $\mathbf{k}^n$ et $\mathbf{k}^m$ respectivement et soit u une application indéfiniment dérivable de U dans V. On suppose que le rang de u est constant égal à p sur U. Pour tout point ξ de U, il existe un difféomorphisme ϕ d'un voisinage U' de l'origine dans $\mathbf{k}^n$ sur un voisinage de ξ dans U et un difféomorphisme ψ d'un voisinage de $u(\xi)$ dans V sur un voisinage V' de l'origine dans $\mathbf{k}^m$ tels que*

$$(\psi \cdot u \cdot \phi)(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0)$$

pour tout point $(x_1, \ldots, x_n)$ de U'.

Par des changements linéaires affines de coordonnées, on peut supposer que ξ et $u(\xi)$ coïncident avec l'origine et que la dérivée $Du(0)$ est définie par

$$Du(0)(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0).$$

Désignons par v l'application de U dans $\mathbf{k}^n$ définie par

$$v(x_1, \ldots, x_n) = \big(u_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_p(x_1, \ldots, x_n), x_{p+1}, \ldots, x_n\big)$$

où $u_1, \ldots, u_m$ désignent les fonctions coordonnées de u. La dérivée de v à l'origine est bijective. Quitte à restreindre U, on peut supposer que v est un difféomorphisme de U sur un cube $C(0, r)$ de $\mathbf{k}^n$ (théorème 1). On désigne par ϕ le difféomorphisme réciproque. Par construction, on a

$$(u \cdot \phi)(x_1, \ldots, x_n) = \big(x_1, \ldots, x_p, w_{p+1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, w_m(x_1, \ldots, x_n)\big)$$

avec

$$w_j = v_j \cdot u \cdot \phi$$

pour tout entier j compris entre $p + 1$ et m. Le rang de u étant exactement p, on voit que les fonctions $w_{p+1}, \ldots, w_m$ sont indépendantes des variables $x_{p+1}, \ldots, x_n$. Il suffit alors de prendre pour ψ la restriction à un voisinage convenable de l'origine de l'application définie par

$$\psi(y_1, \ldots, y_m)$$
$$= \big(y_1, \ldots, y_p, y_{p+1} - w_{p+1}(y_1, \ldots, y_p), \ldots, y_m - w_m(y_1, \ldots, y_p)\big).$$

COROLLAIRE 1. *Soient U et V deux ensembles ouverts de $\mathbf{k}^n$ et $\mathbf{k}^m$ respectivement et soit u une application indéfiniment dérivable de U dans V. On suppose que le rang de u est égal à m en un point ξ. Il existe alors un*

voisinage V' de $u(\xi)$ dans V, un voisinage W de l'origine dans $\mathbf{k}^{n-m}$ et un difféomorphisme ϕ de $V' \times W$ sur un voisinage de ξ dans U tels que

$$u = pr_1 \cdot \phi$$

où pr_1 désigne la projection canonique de $V' \times W$ sur V'.

On remarque que la dérivée de u demeure surjective au voisinage de ξ.

COROLLAIRE 2. *Soient U et V deux ensembles ouverts de $\mathbf{k}^n$ et $\mathbf{k}^m$ respectivement et soit u une application indéfiniment dérivable de U dans V. On suppose que le rang de u est égal à n en un point ξ. Il existe alors un voisinage U' de ξ dans U, un voisinage W de l'origine dans $\mathbf{k}^{m-n}$ et un difféomorphisme ϕ d'un voisinage de $u(\xi)$ dans V sur $U' \times W$* tels que

$$\phi \cdot u = 1_{U'} \times 0$$

où 0 désigne l'application constante de W sur l'origine de $\mathbf{k}^{m-n}$.

On remarque que la dérivée de u demeure injective au voisinage de ξ.

THÉORÈME 3 (Fonctions implicites). *Soient U et V deux ensembles ouverts de $\mathbf{k}^n$ et $\mathbf{k}^m$ respectivement et soit u une application indéfiniment dérivable de $U \times V$ dans $\mathbf{k}^m$. On suppose que u envoie le point (ξ, η) sur l'origine et que la dérivée au point η de l'application partielle $u(\xi, \ )$ est bijective. Il existe alors un voisinage $U' \times V'$ de (ξ, η) dans $U \times V$ et une application indéfiniment dérivable v de U' dans V' tels que l'ensemble des zéros de u dans $U' \times V'$ coïncide avec le graphe de v.*

La dérivée au point (ξ, η) de l'application w de $U \times V$ dans $\mathbf{k}^n \times \mathbf{k}^m$ définie par

$$w(x, y) = \big(x, u(x, y)\big)$$

est bijective. Quitte à restreindre $U \times V$, on peut supposer que w est un difféomorphisme sur un voisinage W de $(\xi, 0)$ dans $\mathbf{k}^n \times \mathbf{k}^m$. On désigne par ϕ l'isomorphisme réciproque et l'on pose

$$U' = \{ x \in U \mid (x, 0) \in W \}.$$

Il suffit alors de prendre pour $v(x)$ la projection de $\phi(x, 0)$ dans V.

(3) Le théorème de Sard

Soient U et V des ensembles ouverts de $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}^m$ respectivement et soit u une application indéfiniment dérivable de U dans V.

On dit qu'un point x de U est un *point régulier* (resp. un *point critique*) *de* u si le rang de l'application $Du(x)$ est égal à m (resp. strictement inférieur à m). On dit qu'un point y de V est une *valeur régulière* (resp. une *valeur critique*) *de* u si tous les points de $u^{-1}(y)$ sont réguliers (resp. s'il existe un point critique dans $u^{-1}(y)$).

THÉORÈME 4 (Sard). *L'ensemble des valeurs critiques de* u *est de mesure de Lebesgue nulle.*

La démonstration va se faire par récurrence sur n, le résultat étant trivial pour n nul. On désigne par A_0 l'ensemble des points critiques de u et l'on pose

$$A_j = \{ x \in U \mid D^\alpha u(x) = 0 \text{ pour tout } \alpha \in \mathbf{N}^n \text{ tel que } |\alpha| \leqslant j \}$$

pour tout entier j strictement positif. On a les inclusions

$$U \supset A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_j \supset A_{j+1} \supset \ldots$$

et l'image par u de l'ensemble $A_j \backslash A_{j+1}$ est mesurable.

Montrons tout d'abord que $u(A_0 \backslash A_1)$ est de mesure nulle. Soit ξ un point de $A_0 \backslash A_1$. Par un changement linéaire de coordonnées, on peut supposer que $\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}(\xi)$ est non nul, en désignant par $u_1, \ldots, u_m$ les fonctions coordonnées de u.

L'application g de U dans $\mathbf{R}^n$ définie par

$$g(x_1, \ldots, x_n) = (u_1(x_1, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n)$$

est de rang n au point ξ. Elle induit donc un isomorphisme d'un voisinage U' de ξ dans U sur un voisinage W de $g(\xi)$ dans $\mathbf{R}^n$ (théorème 1). On désigne par h l'isomorphisme réciproque. Quitte à remplacer u par $u \cdot h$ et U par W (on peut recouvrir $A_0 \backslash A_1$ par une famille dénombrable d'ensembles U'), on peut supposer que l'on a

$$\pi_2 \cdot u = \pi_1$$

en désignant par π_1 (resp. π_2) la projection canonique de $\mathbf{R}^n$ (resp. $\mathbf{R}^m$) sur son premier facteur. Dans ces conditions, un point $(y_1, \ldots, y_m)$ de V est une valeur critique de u si et seulement si le point $(y_2, \ldots, y_m)$ est une valeur critique de l'application partielle $u(y_1, \ )$. L'assertion résulte alors du théorème de Fubini ([5], théorème (7.8)) et de l'hypothèse de récurrence.

Supposons j strictement positif et montrons que $u(A_j \backslash A_{j+1})$ est de mesure nulle. Soit ξ un point de $A_j \backslash A_{j+1}$. Par un changement linéaire de

coordonnées, on peut supposer qu'il existe un multi-indice α de longueur j tel que

$$\frac{\partial v}{\partial x_1}(\xi) \neq 0 \qquad \text{avec} \qquad v = D^\alpha u\,.$$

L'application g de U dans $\mathbf{R}^n$ définie par

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \big(v(x_1, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n\big)$$

est de rang n au point ξ. Elle induit donc un isomorphisme d'un voisinage U' de ξ dans U sur un voisinage W de $(0, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ dans $\mathbf{R}^n$. Désignons par h l'isomorphisme réciproque. L'image par g de l'ensemble $A_j \cap U'$ est contenue dans l'ensemble

$$W' = (0 \times \mathbf{R}) \cap W.$$

On en déduit aisément que les points de $u(A_j \cap U')$ sont des valeurs critiques de l'application $u \cdot h|_{W'}$. L'assertion résulte alors de l'hypothèse de récurrence.

Montrons finalement que l'ensemble $u(A_j)$ est de mesure nulle pour j strictement supérieur à $\dfrac{n}{m} - 1$, ce qui achèvera la démonstration du théorème. Désignons par C un cube fermé de côté r dans U. Il existe une constante c telle que

$$|u(x) - u(\xi)| \leqslant c\,|x - \xi|^{j+1}$$

pour tout point ξ de $C \cap A_j$ et tout point x de C (théorème des accroissements finis). Désignons par k un entier naturel et divisons C en k^n cubes de côté $\dfrac{r}{k}$. Soit C_0 l'un d'eux et soit ξ un point de $C_0 \cap A_j$. Pour tout point x de C_0, on a

$$|x - \xi| \leqslant \frac{r}{k}\,.$$

On en déduit que $u(C_0)$ est contenu dans le cube de côté $2c\left(\dfrac{r}{k}\right)^{j+1}$ et de centre $u(\xi)$ dans $\mathbf{R}^m$. Ceci montre que $u(C \cap A_j)$ est contenu dans une réunion de cubes dont le volume total est au plus égal à

$$(2cr^{j+1})^m\, k^{n-m(j+1)}$$

ce qui démontre l'assertion.