(1) Sur l'existence de certaines fonctions dérivables

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

APPENDICE I

(1) Sur l'existence de certaines fonctions dérivables

LEMME 1. *Il existe une fonction croissante* f *de* $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, *nulle sur* $]-\infty, 0]$, *égale à* 1 *sur* $[1, +\infty[$.

Désignons par g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$\begin{cases} g(x) = \exp(-x^{-2}) & \text{si } x > 0 \\ g(x) = 0 & \text{si } x \leqslant 0 . \end{cases}$$

Il est clair que g est indéfiniment dérivable. Il suffit alors de poser

$$f(x) = \left(\int_{-\infty}^{x} g(t)\, g(1-t)\, dt\right) \Big/ \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, g(1-t)\, dt\right).$$

Ceci a bien un sens puisque $g(t)\, g(1-t)$ est nul si $t \leqslant 0$ ou si $t \geqslant 1$, strictement positif si $0 < t < 1$.

LEMME 2. *Pour tout point* k *de* $\mathbf{Z}^n$ *et tout nombre réel* ε *strictement positif, il existe une fonction* $\alpha_{k,\varepsilon}$ *de* $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, *à valeurs positives, dont le support est contenu dans le cube de côté* 2ε *centré au point* εk *et telle que*

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}^n} \alpha_{k,\varepsilon}(x) = 1$$

pour tout point x *de* $\mathbf{R}^n$.

Désignons par f une fonction vérifiant les conditions du lemme 1. On définit une fonction g de $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ à valeurs positives en posant

$$g(x) = f(x+1) - f(x) .$$

Le support de g est contenu dans l'intervalle $[-1, +1]$ et l'on a

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}} g(x-j) = g(x-j_0) + g(x-j_0-1)$$

pour tout point x de $\mathbf{R}$, en désignant par j_0 la partie entière de x (i.e. le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x). On en déduit que l'on a

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}} g(x-j) = f(x-j_0+1) = 1 .$$

Il suffit alors de poser

$$\alpha_{k,\varepsilon}(x_1, \ldots, x_n) = g\left(\frac{x_1}{\varepsilon} - k_1\right) \ldots g\left(\frac{x_n}{\varepsilon} - k_n\right).$$

LEMME 3. *Pour tout ensemble compact K de $\mathbf{R}^n$ et tout voisinage U de K, il existe une fonction α de $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ à valeurs positives, dont le support est contenu dans U et égale à 1 sur K.*

Munissons $\mathbf{R}^n$ de la norme

$$|(x_1, \ldots, x_n)| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|.$$

Pour tout nombre réel ε strictement positif, l'ensemble

$$K_\varepsilon = \{ x \in \mathbf{R}^n \mid \text{il existe } y \in K \text{ tel que } |x - y| \leqslant \varepsilon \}$$

est compact. Pour ε suffisamment petit, il est contenu dans U. Désignons par A l'ensemble des points k de $\mathbf{Z}^n$ pour lesquels le cube de centre εk et de côté 2ε rencontre K et posons

$$\alpha = \sum_{k \in A} \alpha_{k,\varepsilon}.$$

Cette fonction est indéfiniment dérivable à valeurs positives. D'autre part, on a

$$\operatorname{supp}(\alpha) \subset \bigcup_{k \in A} \operatorname{supp}(\alpha_{k,\varepsilon}) \subset K_\varepsilon$$

et, pour tout point x de K,

$$\alpha(x) = \sum_{k \in A} \alpha_{k,\varepsilon}(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} \alpha_{k,\varepsilon}(x) = 1$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

LEMME 4. *Soit r un nombre réel strictement positif et soit C le cube de côté $2r$ et de centre l'origine dans $\mathbf{R}^n$. Pour tout point a de C, il existe un difféomorphisme u de $\mathbf{R}^n$ sur lui-même tel que*

$$u(0) = a \quad \text{et} \quad u|_{\mathbf{R}^n \setminus C} = 1_{\mathbf{R}^n \setminus C}.$$

On se ramène aisément au cas où n est égal à 1. On désigne par α une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$ dont le support est contenu dans $[0, r]$ telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(t)\, dt = a \quad \text{et} \quad |\alpha| < 1$$

(une telle fonction existe en vertu du lemme 3, car $|a|$ est strictement inférieur à r). Il suffit alors de poser

$$u(x) = x - \int_{-\infty}^{x} (\alpha(t) - \alpha(-t))\, dt.$$