Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 21 (1975)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: INTRODUCTION A LA THÉORIE DES SURFACES DE RIEMANN
Autor: Guenot, J. / Narasimhan, R.
Kapitel: (2) Le théorème des fonctions réciproques
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-47334

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

(2) Le théorème des fonctions réciproques

Dans ce numéro, on désigne par $\mathbf{k}$ le corps des nombres réels ou le corps des nombres complexes.

Si $\mathbf{k}$ est égal à $\mathbf{C}$, indéfiniment dérivable signifie donc holomorphe (chap. I, § 1, proposition 1, corollaire 1).

THÉORÈME 1 (Fonctions réciproques). *Soient U et V deux ensembles ouverts de $\mathbf{k}^n$ et soit u une application indéfiniment dérivable de U dans V. On suppose que la dérivée de u au point ξ est bijective. L'application u est alors un difféomorphisme d'un voisinage de ξ sur un voisinage de $u(\xi)$.*

Par des changements linéaires affines de coordonnées, on peut supposer que ξ et $u(\xi)$ coïncident avec l'origine et que la dérivée $Du(0)$ est l'identité. L'application v de U dans $\mathbf{k}^n$ définie par

$$v(x) = u(x) - x$$

est indéfiniment dérivable et a une dérivée nulle à l'origine. Par continuité, il existe donc un cube $C(0, r)$ relativement compact dans U tel que $Du(x)$ soit bijective et tel que

$$|Dv(x)| \leqslant \frac{1}{2n}$$

pour tout point x de $C(0, r)$ (la norme de $Dv(x)$ est par définition le maximum des modules des dérivées partielles de v au point x). Le théorème des accroissements finis montre que l'on a

$$|v(x') - v(x'')| \leqslant \frac{1}{2}|x' - x''|$$

et par conséquent

$$|u(x') - u(x'')| \geqslant \frac{1}{2}|x' - x''|$$

pour tout couple (x', x'') de points de $C(0, r)$. En particulier, la restriction de u à $C(0, r)$ est injective. Par récurrence sur l'entier k, on définit une application continue de $C\left(0, \frac{r}{2}\right)$ dans $C(0, r)$ en posant

$$w_0(y) = 0 \quad \text{et} \quad w_{k+1}(y) = y - v(w_k(y)).$$

Il résulte de ce qui précède que l'on a

$$| w_{k+1}(y) - w_k(y) | = | v(w_k(y)) - v(w_{k-1}(y)) |$$
$$\leqslant \frac{1}{2} | w_k(y) - w_{k-1}(y) | \leqslant \frac{r}{2^k} .$$

Par conséquent la suite $(w_k)_{k\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers une application continue (holomorphe dans le cas complexe, chap. I, § 1, proposition 1, corollaire 3) w de $C\left(0, \frac{r}{2}\right)$ dans $\overline{C}(0, r)$ et l'on a à la limite

$$w(y) = y - v(w(y)) .$$

En particulier, l'application w prend ses valeurs dans $C(0, r)$. Posons

$$V' = C\left(0, \frac{r}{2}\right) \quad \text{et} \quad U' = C(0, r) \cap u^{-1}(V') .$$

Pour tout point y de V', on a

$$u(w(y)) = w(y) + v(w(y)) = y ,$$

en particulier, l'application w envoie V' dans U'. D'autre part, puisque u est injective sur V', on a

$$w(u(x)) = x$$

pour tout point x de U'. Ceci montre que u est un homéomorphisme de U' sur V' et que w est l'homéomorphisme réciproque. Il reste à voir que w est indéfiniment dérivable.

Pour tout couple (x', x) de points de U', on peut écrire

$$u(x') - u(x) = Du(x)(x' - x) + h(x', x) | x' - x |$$

où $h(\ , x)$ est une fonction qui tend vers 0 lorsque x' tend vers x. Pour tout couple (y, y') de points de V', on a donc

$$w(y') - w(y) = Du(w(y))^{-1}(y' - y)$$
$$+ Du(w(y))^{-1} h(w(y'), w(y)) | w(y') - w(y) |$$

Il résulte d'autre part des inégalités ci-dessus que l'on a

$$\frac{h(w(y'), w(y))}{| y' - y |} \leqslant 2 \frac{h(w(y'), w(y))}{| w(y') - w(y) |}$$

ce qui montre que w est dérivable au point y et que sa dérivée est $Du(w(y))^{-1}$. Comme cette dernière application est continue, on voit que w

est continûment dérivable, puis, par récurrence, qu'elle est indéfiniment dérivable.

THÉORÈME 2 (Théorème du rang). *Soient U et V deux ensembles ouverts de $\mathbf{k}^n$ et $\mathbf{k}^m$ respectivement et soit u une application indéfiniment dérivable de U dans V. On suppose que le rang de u est constant égal à p sur U. Pour tout point ξ de U, il existe un difféomorphisme ϕ d'un voisinage U' de l'origine dans $\mathbf{k}^n$ sur un voisinage de ξ dans U et un difféomorphisme ψ d'un voisinage de $u(\xi)$ dans V sur un voisinage V' de l'origine dans $\mathbf{k}^m$ tels que*

$$(\psi \cdot u \cdot \phi)(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0)$$

pour tout point $(x_1, \ldots, x_n)$ de U'.

Par des changements linéaires affines de coordonnées, on peut supposer que ξ et $u(\xi)$ coïncident avec l'origine et que la dérivée $Du(0)$ est définie par

$$Du(0)(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0).$$

Désignons par v l'application de U dans $\mathbf{k}^n$ définie par

$$v(x_1, \ldots, x_n) = (u_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_p(x_1, \ldots, x_n), x_{p+1}, \ldots, x_n)$$

où $u_1, \ldots, u_m$ désignent les fonctions coordonnées de u. La dérivée de v à l'origine est bijective. Quitte à restreindre U, on peut supposer que v est un difféomorphisme de U sur un cube $C(0, r)$ de $\mathbf{k}^n$ (théorème 1). On désigne par ϕ le difféomorphisme réciproque. Par construction, on a

$$(u \cdot \phi)(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_p, w_{p+1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, w_m(x_1, \ldots, x_n))$$

avec

$$w_j = v_j \cdot u \cdot \phi$$

pour tout entier j compris entre $p + 1$ et m. Le rang de u étant exactement p, on voit que les fonctions $w_{p+1}, \ldots, w_m$ sont indépendantes des variables $x_{p+1}, \ldots, x_n$. Il suffit alors de prendre pour ψ la restriction à un voisinage convenable de l'origine de l'application définie par

$$\psi(y_1, \ldots, y_m)$$
$$= (y_1, \ldots, y_p, y_{p+1} - w_{p+1}(y_1, \ldots, y_p), \ldots, y_m - w_m(y_1, \ldots, y_p)).$$

COROLLAIRE 1. *Soient U et V deux ensembles ouverts de $\mathbf{k}^n$ et $\mathbf{k}^m$ respectivement et soit u une application indéfiniment dérivable de U dans V. On suppose que le rang de u est égal à m en un point ξ. Il existe alors un*

voisinage V' *de* $u(\xi)$ *dans* V, *un voisinage* W *de l'origine dans* $\mathbf{k}^{n-m}$ *et un difféomorphisme* ϕ *de* $V' \times W$ *sur un voisinage de* ξ *dans* U *tels que*

$$u = pr_1 \cdot \phi$$

où pr_1 *désigne la projection canonique de* $V' \times W$ *sur* V'.

On remarque que la dérivée de u demeure surjective au voisinage de ξ.

COROLLAIRE 2. *Soient* U *et* V *deux ensembles ouverts de* $\mathbf{k}^n$ *et* $\mathbf{k}^m$ *respectivement et soit* u *une application indéfiniment dérivable de* U *dans* V. *On suppose que le rang de* u *est égal à* n *en un point* ξ. *Il existe alors un voisinage* U' *de* ξ *dans* U, *un voisinage* W *de l'origine dans* $\mathbf{k}^{m-n}$ *et un difféomorphisme* ϕ *d'un voisinage de* $u(\xi)$ *dans* V *sur* $U' \times W$ tels que

$$\phi \cdot u = 1_{U'} \times 0$$

où 0 *désigne l'application constante de* W *sur l'origine de* $\mathbf{k}^{m-n}$.

On remarque que la dérivée de u demeure injective au voisinage de ξ.

THÉORÈME 3 (Fonctions implicites). *Soient* U *et* V *deux ensembles ouverts de* $\mathbf{k}^n$ *et* $\mathbf{k}^m$ *respectivement et soit* u *une application indéfiniment dérivable de* $U \times V$ *dans* $\mathbf{k}^m$. *On suppose que* u *envoie le point* (ξ, η) *sur l'origine et que la dérivée au point* η *de l'application partielle* $u(\xi,)$ *est bijective. Il existe alors un voisinage* $U' \times V'$ *de* (ξ, η) *dans* $U \times V$ *et une application indéfiniment dérivable* v *de* U' *dans* V' *tels que l'ensemble des zéros de* u *dans* $U' \times V'$ *coïncide avec le graphe de* v.

La dérivée au point (ξ, η) de l'application w de $U \times V$ dans $\mathbf{k}^n \times \mathbf{k}^m$ définie par

$$w(x, y) = \big(x, u(x, y)\big)$$

est bijective. Quitte à restreindre $U \times V$, on peut supposer que w est un difféomorphisme sur un voisinage W de $(\xi, 0)$ dans $\mathbf{k}^n \times \mathbf{k}^m$. On désigne par ϕ l'isomorphisme réciproque et l'on pose

$$U' = \{ x \in U \mid (x, 0) \in W \}.$$

Il suffit alors de prendre pour $v(x)$ la projection de $\phi(x, 0)$ dans V.

(3) Le théorème de Sard

Soient U et V des ensembles ouverts de $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}^m$ respectivement et soit u une application indéfiniment dérivable de U dans V.