Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 21 (1975)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: INTRODUCTION A LA THÉORIE DES SURFACES DE RIEMANN
Autor: Guenot, J. / Narasimhan, R.
Kapitel: (2) Le théorème de Poincaré-Volterra
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-47334

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Il est clair que U' est un voisinage ouvert de A dans U et la formule

$$X \backslash U' = (X \backslash \tilde{U}) \cup \bigcup_{1 \leq j \leq n} c_j \cup \bigcup_{1 \leq j \leq n} V_j$$

montre que $X \backslash U'$ n'a pas de composante connexe compacte.

L'assertion relative aux voisinages compacts se déduit aisément de ce qui précède et du lemme 1.

LEMME 6. *Supposons X dénombrable à l'infini. Il existe alors une suite exhaustive de parties compactes de X dont les complémentaires n'ont pas de composantes connexes relativement compactes.*

C'est une conséquence immédiate du lemme 5.

(2) Le théorème de Poincaré-Volterra

THÉORÈME 1. *Soient X et Y deux variétés topologiques et soit u une application continue de X dans Y. On suppose que X est connexe et que les fibres de u sont discrètes. Si Y est de type dénombrable, il en est de même de X.*

On désigne par $(W_\iota)_{\iota \in I}$ une base dénombrable de la topologie de Y et par $\mathscr{U}$ l'ensemble des composantes connexes relativement compactes des ensembles de la forme $u^{-1}(W_\iota)$. Il suffit de montrer que $\mathscr{U}$ est un recouvrement dénombrable de X.

Pour tout point x de X, il existe un voisinage compact K de x tel que

$$K \cap u^{-1}(u(x)) = \{x\}.$$

En particulier, le point $u(x)$ n'appartient pas à $u(\partial K)$ et il existe un indice ι tel que W_ι contienne $u(x)$ et ne rencontre pas $u(\partial K)$. La composante connexe U de x dans $u^{-1}(W_\iota)$ est contenue dans K. On en déduit que $\mathscr{U}$ est un recouvrement de X.

Il reste à voir que $\mathscr{U}$ est dénombrable.

Remarquons tout d'abord que toute variété topologique Y de type dénombrable vérifie la propriété suivante:

(*) Toute famille d'ensembles ouverts non vides deux à deux disjoints de Y est dénombrable.

Soit U_0 un élément de $\mathscr{U}$. On définit par récurrence une famille $(\mathscr{U}_j)_{j \in \mathbf{N}}$ de parties de $\mathscr{U}$ en posant

$$\mathscr{U}_0 = U_0$$

$$\mathscr{U}_{j+1} = \{ U \in \mathscr{U} \mid \text{il existe } V \in \mathscr{U}_j \text{ tel que } U \cap V \neq \varnothing \}.$$

Démontrons par récurrence que $\mathscr{U}_j$ est dénombrable. Si $\mathscr{U}_j$ est dénombrable, la réunion de ses éléments est une variété topologique U_j de type dénombrable et, pour tout indice ι, la famille $\mathscr{F}_\iota$ des composantes connexes de $u^{-1}(W_\iota)$ qui rencontrent U_j est dénombrable (propriété (*)), ce qui démontre l'assertion puisque $\mathscr{U}_{j+1}$ est contenu dans la réunion des $\mathscr{F}_\iota$.

Démontrons finalement par l'absurde que $\mathscr{U}$ est la réunion des $\mathscr{U}_j$. Désignons par U la réunion des éléments de tous les $\mathscr{U}_j$ et par V la réunion des éléments de $\mathscr{U}$ n'appartenant à aucun des $\mathscr{U}_j$. Les ensembles U et V sont des ouverts non vides recouvrant X. Ils sont disjoints par construction ce qui contredit la connexité de X et démontre du même coup le théorème.

(3) Le groupe fondamental d'une variété topologique compacte connexe

PROPOSITION 1. *Le groupe fondamental d'une variété topologique compacte connexe X est de génération finie.*

Recouvrons X par des domaines de cartes $V_0, \ldots, V_n$ isomorphes à des boules, centrées en des points $x_0, \ldots, x_n$. Pour tout entier j compris entre 0 et n, on désigne par U_j une boule de centre x_j relativement compacte dans V_j et l'on suppose que $U_0, \ldots, U_n$ recouvrent encore X.

Pour tout couple d'entiers (j, k), on recouvre $\overline{U}_j \cap \overline{U}_k$ par des domaines de cartes $U_1^{j,k}, \ldots, U_{n_{j,k}}^{j,k}$ isomorphes à des boules, centrées en des points $x_1^{j,k}, \ldots, x_{n_{j,k}}^{j,k}$ de $\overline{U}_j \cap \overline{U}_k$. Remarquons que $n_{j,k}$ est nul si $\overline{U}_j \cap \overline{U}_k$ est vide.

Pour tout entier l compris entre 1 et $n_{j,k}$, on désigne par $\alpha_l^{j,k}$ un chemin joignant x_j à $x_l^{j,k}$ dans V_j et par $\beta_l^{j,k}$ un chemin joignant $x_l^{j,k}$ à x_k dans V_k. On pose

$$\gamma_l^{j,k} = \alpha_l^{j,k}\, \beta_l^{j,k}\,.$$

Nous allons montrer que tout lacet c de X au point x_0 est homotope à un produit de chemins $\gamma_l^{j,k}$, ce qui démontrera l'assertion.

Le lacet c se décompose en un produit de chemins $c_1, \ldots, c_p$ dont chacun est contenu dans l'un des ouverts $U_0, \ldots, U_n$.

Désignons par c_m et c_{m+1} deux tels chemins. Le premier joint un point a_{m-1} à un point a_m dans U_j, le second le point a_m à un point a_{m+1} dans U_k. Il existe un ensemble ouvert $U_l^{j,k}$ contenant a_m. On choisit alors un chemin α joignant a_{m-1} à x_j dans U_j, un chemin β joignant x_k à a_{m+1} dans U_k et un chemin γ joignant $x_l^{j,k}$ à a_m dans $U_l^{j,k}$. Le chemin $\alpha\, \alpha_l^{j,k}\, \gamma$ est homotope au chemin c_m dans V_j et le chemin $\gamma^{-1} \beta_l^{j,k} \beta$ est homotope au chemin c_{m+1} dans V_k. Par conséquent, le chemin $\alpha\, \gamma_l^{j,k} \beta$ est homotope au chemin $c_m c_{m+1}$ dans X. On en déduit aisément l'assertion.