Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 22 (1976)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: OPÉRATIONS D'ADAMS EN THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES DES GROUPES FINIS

Autor: Kervaire, Michel

Kapitel: §1. L'anneau des représentations virtuelles.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-48172

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Les opérations d'Adams ont été introduites dans le contexte des schémas par R. Swan. (*Proc. Symp. Pure Math. A.M.S.*, vol. XXI, Univ. of Wisconsin (1971), 155-159.)

Enfin, les opérations d'Adams proprement dites ont été introduites en topologie par J.F. Adams. (*Ann. of Math.* 75 (1962), 603-632.)

§ 1. L'ANNEAU DES REPRÉSENTATIONS VIRTUELLES.

Soient G un groupe (multiplicatif) et F un corps commutatif. On notera FG l'algèbre de groupe de G sur F, i.e. l'espace vectoriel ayant pour base les éléments de G muni de la multiplication induite par la multiplication dans G.

Une représentation de G sur F est une classe d'isomorphie de FG-modules (à gauche) de dimension finie sur F. Si V est un FG-module (de dimension finie), on dira par abus de langage que V est une représentation.

Soient V un FG-module et $e_1, \ldots, e_n$ une F-base de V. L'action d'un élément $s \in G$ sur V exprimée dans cette base, i.e.

$$s \,.\, e_j = \sum_{i=1}^{n} S_{ij}\, e_i$$

fournit un homomorphisme $\rho : G \to GL_n(F)$ qui associe à s la matrice inversible $\rho(s) = (S_{ij})$. L'homomorphisme ρ est appelé la forme matricielle de la représentation V associée à la base choisie.

Soient G un groupe (fini) et F un corps commutatif. A ces données on associe l'anneau $R(FG)$ des F-représentations virtuelles de G dont nous rappelons brièvement la construction.

Soit L la groupe abélien libre ayant pour $\mathbf{Z}$-base l'ensemble des représentations de G sur F. Soit L_0 le sous-groupe de L engendré par les éléments de la forme $V - V' - V''$ chaque fois qu'il existe une suite exacte $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$ de FG-modules.

DÉFINITION. $R(FG) = L/L_0$. *Un élément de* $R(FG)$ *s'appelle une* F*-représentation virtuelle de* G.

La classe de V dans $R(FG)$ sera notée $[V]$, ou même quelquefois simplement V.

Remarques. On voit facilement que tout élément de $R(FG)$ peut s'écrire sous la forme $[U] - [V]$, où U et V sont des représentations de G sur F. Rappelons que si la caractéristique de F ne divise pas l'ordre de

G, l'existence d'une suite exacte $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$ entraîne que $V \cong V' \oplus V''$. Ceci n'est plus vrai si caract (F) divise l'ordre de G et il est important pour la suite de ne pas faire d'hypothèse inutilement restrictive sur le corps F.

La structure d'anneau sur $R(FG)$ est fournie par le produit tensoriel sur F des représentations. Si V_1 et V_2 sont deux FG-modules, G opère sur $V_1 \otimes_F V_2$ par $s \,.\, (v_1 \otimes v_2) = sv_1 \otimes sv_2$, $s \in G$, et on vérifie sans difficulté que cette formule fournit bien une structure de FG-module sur $V_1 \otimes_F V_2$. On obtient ainsi un produit sur L et il est immédiat de vérifier que L_0 est un idéal. Le produit tensoriel induit donc un produit sur $R(FG)$.

Comme $V_1 \otimes_F V_2 \cong V_2 \otimes_F V_1$, l'anneau $R(FG)$ est commutatif. Le corps F, muni de la structure de FG-module « triviale » telle que $sa = a$ pour tout $a \in F$, représente l'élément neutre pour la multiplication dans $R(FG)$. On écrira $[V_1] \,.\, [V_2]$ ou $V_1 \,.\, V_2$ pour le produit dans $R(FG)$.

La structure *additive* de $R(FG)$ est facile à expliciter:

DÉFINITION. Un FG-module S est dit *simple* ou *irréductible* s'il est non-nul et s'il ne possède pas d'autres sous-modules que 0 et S lui-même.

THÉORÈME. *Soient G un groupe fini et F un corps commutatif. L'ensemble $S(FG)$ des classes d'isomorphie de FG-modules simples est un ensemble fini. Le groupe $R(FG)$ est abélien libre avec pour base l'ensemble $S(FG)$.*

Preuve. Soient S un FG-module simple et $v \in S$, $v \neq 0$. L'application $FG \to S$ donnée par $a \to av$ définit un homomorphisme de FG-modules (FG étant regardé comme FG-module à gauche par la multiplication dans l'anneau FG.) Cet homomorphisme est surjectif puisque S est simple. On voit donc que S apparaît comme facteur de composition d'une suite de Jordan-Hölder pour le module FG. Ainsi, il y a au plus l classes d'isomorphisme de FG-modules simples, où l est la longueur d'une suite de Jordan-Hölder pour le module FG. (Pour le théorème de Jordan-Hölder, voir [Curtis-Reiner] cité dans l'introduction, § 13.)

Soit maintenant R le groupe abélien libre sur l'ensemble fini $S(FG)$ des représentations irréductibles.

En associant à tout élément de $S(FG)$ sa classe dans $R(FG)$, on obtient un homomorphisme

$$f : R \to R(FG).$$

Inversement, on définit $g : R(FG) \to R$ comme suit. Si V est un FG-module (de dimension finie) et $V = V_1 \supset V_2 \supset \ldots \supset V_k \supset V_{k+1} = 0$ une suite de Jordan-Hölder pour V, on pose

$$g_0(V) = \sum_{i=1}^{k} S_i ,$$

où S_i est la classe d'isomorphie du facteur simple V_i/V_{i+1}, $i = 1,\ldots, k$.

D'après le théorème de Jordan-Hölder, $g_0(V)$ est un élément de R qui ne dépend que de la classe d'isomorphie de V. On a donc un homomorphisme $g_0 : L \to R$. On constate que g_0 s'annule sur les générateurs de L_0, donc sur L_0 tout entier, et induit par conséquent un homomorphisme $g : R(FG) \to R$.

La vérification de $gf = id.$ est immédiate. Celle de $fg = id.$ facile.

Exemple. Pour tout $\chi \in \mathrm{Hom}\,(G, F^{\cdot})$, on définit sur F une structure de FG-module en posant $s \,.\, v = \chi(s)\, v$, $v \in F$. Ce module sera noté F_χ ou $F(\chi)$. Il est évidemment simple. On a $F(\chi_1) \otimes F(\chi_2) = F(\chi_1 . \chi_2)$. Le cas où G est abélien d'exposant n, disons, et où F contient les racines du polynôme $X^n - 1$ est fondamental pour la théorie. Dans ce cas les classes d'isomorphie des FG-modules simples $F(\chi)$, $\chi \in \mathrm{Hom}\,(G, F^{\cdot})$ forment une liste complète sans répétition des F-représentations irréductibles de G. Donc, $R(FG)$ pour G abélien et avec l'hypothèse faite sur F s'identifie à l'anneau de groupe $\mathbf{Z}\, X$, où $X = \mathrm{Hom}\,(G, F^{\cdot})$.

Revenons au cas général. Si $f : G \to G'$ est un homomorphisme de groupes, f s'étend (de manière unique) à un homomorphisme d'algèbre $f : FG \to FG'$ et tout FG'-module V devient un FG-module par $\lambda\, v = f(\lambda)\, v$, $\lambda \in FG$, $v \in V$. Cette construction fournit un homomorphisme d'anneau $f^* : R(FG') \to R(FG)$ dit de *restriction.* (On a également un homomorphisme *induit* $f^* : R(FG) \to R(FG')$ pour la structure additive de ces anneaux, et donné par $V \to FG' \otimes_{FG} V$. On ne s'en servira pas.)

Si $F \to E$ est une extension de corps, tout FG-module V fournit un EG-module $E \otimes_F V$ que l'on notera aussi EV. On obtient ainsi un homomorphisme d'anneaux $i : R(FG) \to R(EG)$ dit d'*extension des scalaires.*

L'anneau $R(FG)$ est encore muni d'une involution dont nous aurons besoin pour définir les opérations d'Adams d'indices négatifs.

Soit V un FG-module. On considère le dual $V^* = \mathrm{Hom}_F\,(V, F)$ qui est muni d'une structure de FG-module définie par la formule

$$(a\,.\,f)(v) = \sum_{s \in G} a_s f(s^{-1} v) ,$$
$$a = \sum_{s \in G} a_s \,.\, s \in FG,\ v \in V .$$

La classe d'isomorphisme de V^* ne dépend que de celle de V. La représentation V^* s'appelle la *duale* de V. On a $V^{**} \cong V$, canoniquement.

On laisse au lecteur le soin de vérifier que l'opération * induit un automorphisme involutif

$$* : R(F\,G) \to R(F\,G)$$

qui commute aux homomorphismes $f^* : R(FG') \to R(FG)$ et $f_* : R(FG) \to R(FG')$ pour $f : G \to G'$ et $i : R(FG) \to R(EG)$.

Deux théorèmes classiques jouent un rôle essentiel dans la suite.

THÉORÈME I. *Soit* $F \to E$ *une extension quelconque de corps commutatifs. L'homomorphisme* $i : R(FG) \to R(EG)$ *d'extension des scalaires est injectif.*

Soit p un nombre premier. Un sous-groupe cyclique de G sera dit *p-régulier* si son ordre est premier à p. Tout sous-groupe cyclique est 0-régulier.

THÉORÈME II. *Soient* G *un groupe fini et* F *un corps. Soit* $\mathscr{C}$ *la famille des sous-groupes cycliques p-réguliers de* G, *où* $p = \text{caract}(F)$. *L'homomorphisme*

$$\text{res} : R(F\,G) \to \prod_{C \in \mathscr{C}} R(F\,C)\,,$$

produit des restrictions $R(FG) \to R(FC)$, *est injectif.*

Ces théorèmes constituent un analogue du «splitting principle» en topologie et seront utilisés de façon similaire pour démontrer certaines propriétés des opérations d'Adams.

Pour démontrer les théorèmes I et II, les faits fondamentaux sont les suivants.

LEMME 1. *Soient* G *un groupe fini et* $F \subset E$ *une extension de corps quelconque. On a* $E \otimes_F \text{rad}\, FG = \text{rad}\, EG$, *où* rad *dénote le radical.*

Soit V un FG-module. On appelle caractère de V la fonction F-linéaire $\chi : FG \to F$ définie par

$$\chi(s) = \text{Trace}\, \rho(s)\,,$$

où $\rho(s)$ est la transformation F-linéaire $V \to V$ associée à s, i.e. $\rho(s)(v) = s\,.\,v$.

LEMME 2. *Soient* G *un groupe fini et* $X(FG)$ *le sous-espace de* $\text{Hom}_F(FG, F)$ *engendré par les caractères des F-représentations de* G. *Les carac-*

tères $\chi_1, \ldots, \chi_r$ *des représentations irréductibles forment une* F*-base de* $X(FG)$.

Esquisses de démonstrations.

Soit k un corps premier, i.e. $\mathbf{Q}$ ou $\mathbf{F}_p$ pour p premier. D'après le théorème de Wedderburn, [Curtis-Reiner], § 26, l'algèbre semi-simple $kG/\mathrm{rad}\, kG$ se décompose en produit

$$kG/\mathrm{rad}\, kG \cong D_1(n_1) \times \ldots \times D_s(n_s)$$

d'algèbre de matrices $D_i(n_i)$ sur des corps gauches D_i.

Les corps gauches D_i sont munis d'une forme trace non-dégénérée, i.e. $(x, y) \to \mathrm{Trace}_{D_i/k}(x.y)$ est bilinéaire de noyau nul.

En effet, pour $k = \mathbf{Q}$ c'est évident et dans le cas où $k = \mathbf{F}_p$, les D_i sont des corps finis, donc en fait commutatifs et galoisiens, donc séparables sur $\mathbf{F}_p$.

On vérifie alors facilement que pour tout corps $F \supset k$, les F-algèbres $F \otimes_k D_i$ ont également une trace sur F non-dégénérée et sont donc semi-simples.

Il en résulte que $F \otimes_k (kG/\mathrm{rad}\, kG) \cong FG/(F \otimes_k \mathrm{rad}\, kG)$ est semi-simple. Donc, $\mathrm{rad}\, FG \subset F \otimes_k \mathrm{rad}\, kG$. Comme l'inclusion inverse est évidente, on a $F \otimes_k \mathrm{rad}\, kG = \mathrm{rad}\, FG$. Le lemme 1 s'ensuit immédiatement.

De plus, le fait que la forme trace sur F soit non-dégénérée dans $F \otimes_k D_i$ entraîne aussi que dans la décomposition de Wedderburn

$$F\,G/\mathrm{rad}\, F\,G \cong K_1(n_1) \times \ldots \times K_r(n_r),$$

chaque corps (gauche) K_i, $i = 1, \ldots, r$, possède une forme trace sur F non-dégénérée. En particulier, il existe des éléments $\alpha_i \in K_i$ tels que $\mathrm{trace}_F(\alpha_i) \neq 0$, $i = 1, \ldots, r$.

Pour démontrer le lemme 2, on observe d'abord que les caractères $\chi_1, \ldots, \chi_r$ des FG-modules simples engendrent $X(FG)$. Il reste alors à démontrer que ces caractères sont linéairement indépendants sur F. Soit S_i le $K_i(n_i)$-module formé des matrices $n_i \times n_i$ dont toutes les colonnes sont nulles sauf la première. On sait que $S_1, \ldots, S_r$ regardés comme FG-modules forment une liste complète de FG-modules simples non-isomorphes.

Soient maintenant $a_i \in FG$ des éléments se projettant sur $\alpha_i e_{11} \in K_i(n_i)$ et sur 0 dans les autres facteurs $K_j(n_j)$ pour $j \neq i$. (e_{11} dénote la matrice $n_i \times n_i$ de $K_i(n_i)$ dont tous les cœfficients sont nuls sauf celui d'indice (1, 1) qui est égal à 1.)

Un calcul de traces montre aisément que

$$\chi_i(a_j) = \delta_{ij} \,.\, \mathrm{trace}_F(\alpha_i) \,.$$

L'indépendance linéaire de $\chi_1, \ldots, \chi_r$ en résulte.

Démonstration du théorème I: $R(FG) \to R(EG)$ est injectif.

Il suffit de voir que si S et T sont deux FG-modules simples non-isomorphes, alors ES et ET sont semi-simples et sans facteur commun, i.e. ES somme directe de EG-modules simples S_i, ET somme directe de EG-modules simples T_j, et $S_i \not\cong T_j$ pour tout couple (i, j).

ES et ET sont semi-simples car ils sont annulés par $E \otimes \mathrm{rad}\, FG$. Donc, par rad EG, en vertu du lemme 1.

Pour vérifier qu'ils n'ont pas de facteur simple commun, il suffit de calculer $\mathrm{Hom}_{EG}(ES, ET) = 0$. Cela résulte de $\mathrm{Hom}_{EG}(ES, ET) = E \otimes_F \mathrm{Hom}_{FG}(S, T) = 0$.

Démonstration du théorème II: res : $R(FG) \to \prod_{C \in \mathscr{C}} R(FC)$ est injectif.

Soit $\chi : R(FG) \to X(FG)$ l'application qui associe à une représentation V son caractère χ_V. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} R(FG) & \to & X(FG) \\ \downarrow \mathrm{res} & & \downarrow \mathrm{res} \\ \prod_{C \in \mathscr{C}} R(FC) & \to & \prod_{C \in \mathscr{C}} X(FC)\,, \end{array}$$

où $\mathscr{C}$ est l'ensemble des sous-groupes cycliques p-réguliers de G, $p = \mathrm{caract}\, F$.

Si res $\chi_\alpha = 0$, cela veut dire que χ_α s'annule sur tous les éléments p-réguliers de G. Il en résulte que χ_α est identiquement nulle. En effet, tout élément x de G s'écrit $x = y \,.\, z$, où y et z commutent, y est p-régulier et z d'ordre une puissance de p. (Si mq est l'ordre de x, avec m premier à p et q une puissance de p, prendre $y = x^q$ et $z = x^m$.) Si V est une représentation de G, les valeurs propres de z sont toutes égales à 1. (C'est la seule racine p-ième de 1 dans F.) Donc les valeurs propres de $x = yz$ sont les mêmes que celles de y. Il en résulte que $\chi_V(x) = \chi_V(y)$, et $\chi_\alpha(x) = \chi_\alpha(y)$ pour tout $\alpha \in R(FG)$.

Donc, res $\chi_\alpha = 0$ entraîne $\chi_\alpha = 0$. Comme d'autre part $R(FG)$ est abélien libre avec pour $\mathbf{Z}$-base les représentations irréductibles $S_1, \ldots, S_r$ et que $\chi_1 = \chi(S_1), \ldots, \chi_r = \chi(S_r)$ est une F-base de l'espace des caractères $X(FG)$ en vertu du lemme 2, on conclut que si res $\chi_\alpha = 0$, alors α est contenu dans $pR(FG)$.

Le noyau de res : $R(FG) \to \prod_{C \in \mathscr{C}} R(FC)$ est donc contenu dans $pR(FG)$. Comme maintenant $\prod_{C \in \mathscr{C}} R(FC)$ est sans torsion, on a

$$\text{Ker (res)} = \cap_n p^n R(F\,G) = 0\,.$$

Au § 5 nous aurons besoin de $K(FG)$ dont la définition sera alors rappelée, et du fait que si F est de caractéristique non-nulle, alors la flèche d'extension des scalaires $K(FG) \to K(EG)$ est une injection directe. La démonstration est donnée dans [Serre], page 136, où $K(FG)$ est noté $P_F(G)$. Nous ne la reproduisons pas.

§ 2. Puissances extérieures

Les puissances extérieures des FG-modules fournissent un élément de structure additionnel dans l'anneau $R(FG)$, appelé λ-structure qui nous permettra au paragraphe suivant de définir pour tout entier n un endomorphisme d'anneau

$$\Psi_n : R(F\,G) \to R(F\,G)$$

jouissant de propriétés analogues à celles des opérations d'Adams en topologie.

Soit V un FG-module, toujours de dimension finie. On notera $\lambda_m V$ la m-ième puissance extérieure de V. C'est le quotient de la puissance tensorielle $V^m = V \otimes V \otimes \ldots \otimes V$ (m facteurs) par le sous-espace vectoriel engendré par les éléments de la forme $v_1 \otimes \ldots \otimes v_m$ avec $v_i = v_j$ pour au moins nu couple d'indices distincts (i, j).

L'action de G sur $\lambda_m V$ est induite de l'action de G sur V^m. On convient que $\lambda_0 V = F$ avec action triviale, et $\lambda_1 V = V$.

Il s'avère que les puissances extérieures λ_m, $m \geqq 0$, induisent des opérations

$$\lambda_m : R(F\,G) \to R(F\,G)$$

sur l'anneau des représentations virtuelles, et on a la formule habituelle

$$\lambda_m(\alpha + \beta) = \sum_{i=0}^{m} (\lambda_i \alpha) \,.\, (\lambda_{m-i} \beta)\,.$$

Le point essentiel est le

Lemme. *Soit* $0 \to V_0 \to V_1 \to V \to 0$ *une suite exacte de* FG*-modules. Alors,*

$$[\lambda_m V_1] = \sum_{i=0}^{m} [\lambda_i V_0] \,.\, [\lambda_{m-i} V]$$

dans $R(FG)$ *pour* $m = 0, 1, \ldots$.