Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 22 (1976)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DIVISIBILITÉ DE CERTAINES FONCTIONS ARITHMÉTIQUES
Autor: Serre, Jean-Pierre
Kapitel: §2. THÉORÈMES DE DENSITÉ
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-48187

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Gal (K/E), où E est un sous-corps de K. On peut alors appliquer à $\log L(s,\chi)$ les méthodes classiques de Hadamard et de La Vallée Poussin, cf. par exemple [10], p. 336-337. [En fait, [10] se borne à prouver l'existence d'une région (1.8) où $L = L(s, \chi)$ est holomorphe $\neq 0$, et où $|L'/L| = O(\log^A T)$. Pour passer de là à la majoration

$$|\log L(s, \chi)| = O(\log\log T),$$

on distingue deux cas, suivant que $\mathscr{R}(s)$ est ou non $\geqslant 1 + 1/\log^A T$. Dans le premier cas, on a:

$$\begin{aligned} |\log L(s, \chi)| &\leqslant [E:Q] \log \zeta(\mathscr{R}(s)) \leqslant [E:Q]\, A \log\log T + O(1) \\ &= O(\log\log T). \end{aligned}$$

Le deuxième cas se ramène au premier: on applique le théorème des accroissements finis au segment horizontal I_s joignant s au point s_0 tel que

$$\mathscr{I}(s_0) = \mathscr{I}(s), \quad \mathscr{R}(s_0) = 1 + 1/\log^A T,$$

et l'on obtient

$$\begin{aligned} |\log L(s, \chi)| &\leqslant |\log L(s_0, \chi)| + |s - s_0| \sup_{\sigma \in I_s} |L'/L(\sigma, \chi)| \\ &= O(\log\log T) + O(1) = O(\log\log T).] \end{aligned}$$

§2. THÉORÈMES DE DENSITÉ

2.1. *Définitions.* Soit E une partie de l'ensemble $\mathbf{N}^*$ des entiers > 0; on note E' le complémentaire $\mathbf{N}^* - E$ de E. Si $x \in \mathbf{N}^*$, on note $E(x)$ le nombre des $n \leqslant x$ qui appartiennent à E; on a $E(x) + E'(x) = x$. Lorsque E est l'ensemble des n satisfaisant à une relation R, on écrit aussi

$$N\{n \leqslant x : R(n)\}$$

à la place de $E(x)$.

On dit que E est de *densité* c si $\lim\limits_{x \to \infty} E(x)/x = c$, autrement dit si

$$E(x) = cx + o(x) \quad \text{pour} \quad x \to \infty.$$

Soit P un ensemble de nombres premiers. Nous dirons que P est *associé* à E si, pour tout $p \in P$ et tout entier $m \geqslant 1$ non divisible par p, on a $pm \in E$.

THÉORÈME 2.2. *Si P est associé à E, et si P jouit de la propriété* (1.1), *à savoir* $\sum\limits_{p \in P} 1/p = +\infty$, *alors E est de densité* 1.

Soit I une partie finie de P, et soit E_I l'ensemble des entiers de la forme pm, avec $p \in I$ et $m \geqslant 1$ non divisible par p. Le complémentaire E_I' de E_I est l'ensemble des entiers $n \geqslant 1$ tels que

$$n \not\equiv p\,,\ 2p\,,\ 3p\,,\ \ldots\,,\ (p-1)\,p \pmod{p^2} \quad \text{pour tout } p \in I\,.$$

Sa densité est $c_I' = \prod_{p \in I} (1-(p-1)/p^2)$. Mais, vu (1.1), le produit infini $\prod_{p \in P} (1-(p-1)/p^2)$ diverge, i. e. tend vers 0. Les c_I' tendent donc vers 0, et comme E' est contenu dans tous les E_I', on a

$$\limsup E'(x)/x \leqslant \lim c_I' = 0\,,$$

d'où le fait que E' est de densité 0.

Le cas régulier. D'après (2.2), on a $E'(x) = o(x)$ pour $x \to \infty$. Nous allons voir que l'on peut préciser ce résultat, à condition de faire des hypothèses supplémentaires sur P. Tout d'abord:

THÉORÈME 2.3. *Supposons que P soit associé à E, et soit régulier de densité $\alpha > 0$. On a alors:*

(a) $E'(x) = O(x/\log^\alpha x)$ *si* $\alpha < 1$;

(b) $E'(x) = O(x^{1-\delta})$, *avec* $\delta > 0$, *si* $\alpha = 1$.

Disons d'autre part que E est *multiplicatif* s'il possède la propriété:

(M) *Si n_1 et n_2 sont des entiers $\geqslant 1$ premiers entre eux, on a*

$$n_1 n_2 \in E \Leftrightarrow \{n_1 \in E \quad \text{ou} \quad n_2 \in E\}\,.$$

THÉORÈME 2.4. *Supposons E multiplicatif, et soit P l'ensemble des nombres premiers appartenant à E. Alors:*

(a) *Si P est régulier de densité α, avec $0 < \alpha < 1$, on a*

$$E'(x) \sim cx/\log^\alpha x\,, \quad \textit{avec} \quad c > 0\,.$$

(b) *Si P est régulier de densité 1, on a*

$$E'(x) = O(x^{1-\delta})\,, \quad \textit{avec} \quad \delta > 0\,.$$

(Noter qu'il résulte de (M) que P est associé à E.)

Démonstration de (2.4) (d'après Raikov, Wintner, Delange). — Posons $b_n = 0$ si $n \in E$, et $b_n = 1$ si $n \in E'$, de sorte que:

$$E'(x) = \sum_{n \leqslant x} b_n\,;$$

la condition (M) signifie que b_n est une fonction *multiplicative* de n. On a $b_1 = 1$ (mis à part le cas trivial où $E' = \varnothing$). Considérons la série de Dirichlet

$$f(s) = \sum b_n n^{-s} = \sum_{n \in E'} n^{-s},$$

qui converge absolument pour $\mathscr{R}(s) > 1$. On a

$$f(s) = \prod_p f_p(s), \quad \text{où} \quad f_p(s) = \sum_{pm \in E'} p^{-ms}.$$

La série $f_p(s)$ commence par le terme $1 + p^{-s}$ si et seulement si p n'appartient pas à P. On peut donc écrire f sous la forme

$$f(s) = \prod_{p \notin P} (1 + p^{-s}) \prod_p h_p(s),$$

où le produit des h_p est absolument convergent pour $\mathscr{R}(s) > 1/2$. On a donc

$$\log f(s) = \sum_{p \notin P} p^{-s} + \theta_1(s), \tag{2.5}$$

où $\theta_1(s)$ est holomorphe et bornée dans tout demi-plan $\mathscr{R}(s) \geqslant c$, avec $c > 1/2$. Plaçons-nous dans le cas (a), i. e. supposons P régulier de densité α, avec $0 < \alpha < 1$; le complémentaire de P est régulier de densité $1 - \alpha$; vu (1.3), et la formule ci-dessus, on a

$$\log f(s) = (1 - \alpha) \log 1/(s-1) + \theta_2(s),$$

où $\theta_2(s)$ est holomorphe pour $\mathscr{R}(s) \geqslant 1$. Revenant à f, on obtient

$$f(s) = \frac{1}{(s-1)^{1-\alpha}} h(s), \tag{2.6}$$

où $h(s) = \exp \theta_2(s)$ est holomorphe et $\neq 0$ pour $\mathscr{R}(s) \geqslant 1$. D'après une variante du théorème taubérien de Ikehara (cf. [2], [3], [14], [15], [29]), ceci entraîne

$$\sum_{n \leqq x} b_n \sim cx/\log^\alpha x, \quad \text{avec} \quad c = h(1)/\Gamma(1-\alpha), \tag{2.7}$$

d'où (2.4) dans le cas $\alpha < 1$. Si d'autre part $\alpha = 1$, le même argument montre que $f(s)$ est holomorphe pour $\mathscr{R}(s) \geqslant 1$; comme c'est une série à coefficients positifs, il en résulte, d'après un lemme classique de Landau, qu'elle converge en un point $s = 1 - \delta$, avec $\delta > 0$; on en déduit aussitôt la majoration cherchée:

$$\sum_{n \leqq x} b_n = O(x^{1-\delta}).$$

Démonstration de (2.3). Soit $E(P)$ l'ensemble des entiers de la forme pm, avec $p \in P$ et $m \geqslant 1$ premier à p. On a $E(P) \subset E$, d'où $E'(x) \leqslant E(P)'(x)$. D'autre part, $E(P)$ est multiplicatif, et son intersection avec l'ensemble des nombres premiers est P. En appliquant (2.4) à $E(P)$, on obtient

$$E(P)'(x) = O(x/\log^{\alpha} x) \qquad \text{dans le cas (a)},$$

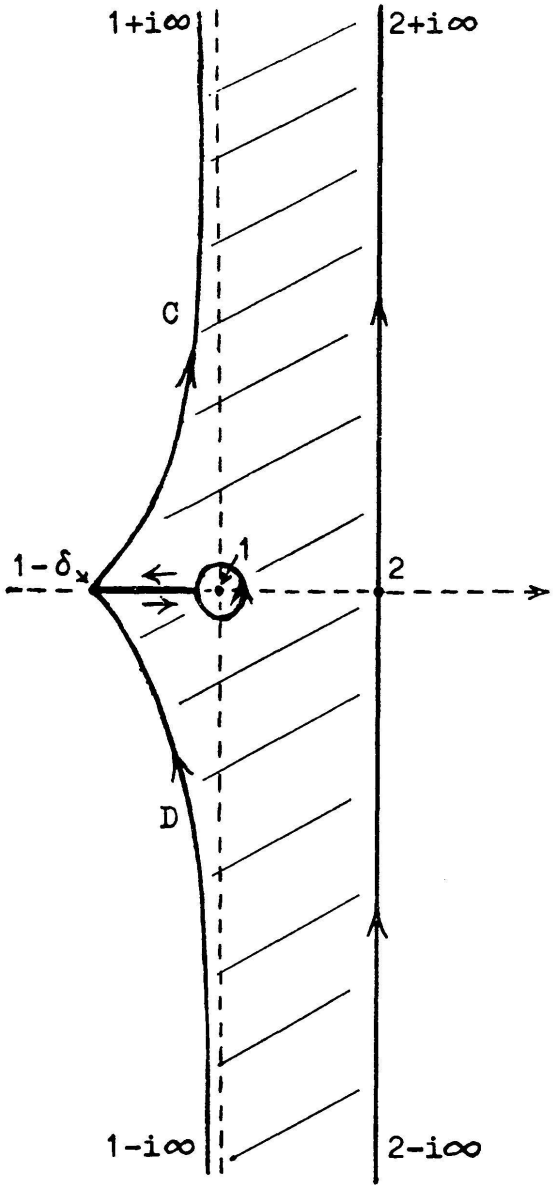
$$E(P)'(x) = O(x^{1-\delta}), \text{ avec } \delta > 0, \qquad \text{dans le cas (b)},$$

d'où (2.3) puisque $E'(x) \leqslant E(P)'(x)$.

Le cas frobénien. Revenons aux hypothèses de (2.4 a); on a

$$E'(x) = cx/\log^{\alpha} x + o(x/\log^{\alpha} x), \qquad \text{avec } c > 0.$$

Si P est *frobénien*, on peut remplacer le terme d'erreur $o(x/\log^{\alpha} x)$ par $O(x/\log^{1+\alpha} x)$, et même donner un *développement asymptotique* de $E'(x)$:



THÉORÈME 2.8. *Supposons que E soit multiplicatif, et que l'ensemble P des nombres premiers appartenant à E soit frobénien de densité α, avec $0 < \alpha < 1$. Il existe alors des nombres*

$$c_0, c_1, \ldots, c_k, \ldots, \quad \textit{avec} \quad c_0 > 0,$$

tels que, pour tout entier $k \geqslant 0$, on ait

$$E'(x) = \frac{x}{\log^{\alpha} x}\left(c_0 + c_1/\log x + \ldots + c_k/\log^k x + O(1/\log^{k+1} x)\right).$$

La démonstration utilise une méthode due à Landau [8]; je me bornerai à la résumer, renvoyant à [8] ou [28] pour plus de détails:

Soit $f(s) = \sum b_n n^{-s} = \sum_{n \in E'} n^{-s}$, comme ci-dessus. On montre au moyen de (2.5) et (1.7) que f se prolonge en une fonction holomorphe dans une région du type ci-contre (les branches infinies C et D étant définies par

$\mathscr{R}(s) = 1 - b/\log^A T$, avec $T = 2 + |\mathscr{I}(s)|$), et que l'on a dans cette région

$$|f(s)| = O(\log^A T) \quad \text{pour} \quad T \to \infty .$$

Posons alors

$$b(x) = \sum_{n \leq x} b_n \log(x/n) .$$

On vérifie que

$$b(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} f(s)\, x^s ds/s^2 .$$

La formule de Cauchy montre que cette intégrale est égale à l'intégrale analogue prise sur le bord gauche de la région considérée. Les contributions des branches infinies C et D sont négligeables devant $x/\log^N x$, quel que soit N; celle du cercle centré en 1 tend vers 0 avec le rayon du cercle. Le terme principal est donc fourni par les deux intégrales sur le segment horizontal joignant $1 - \delta$ à 1; ces dernières s'évaluent sans difficulté, à partir du développement de $f(s)$ au voisinage de $s = 1$. On trouve que:

$$b(x) = \frac{x}{\log^\alpha x} \left(d_0 + d_1/\log x + \ldots + d_k/\log^k x + O(1/\log^{k+1} x)\right) .$$

En appliquant ce résultat à $x + \delta x$, avec $\delta \sim 1/\log^{K+1} x$, et en retranchant, on obtient facilement l'estimation cherchée pour $E'(x) = \sum_{n \leq x} b_n$ (cf. [17], p. 277, ou [28], p. 723-724).

De façon plus précise, si le développement de $f(s)/s$ au voisinage de $s = 1$ est:

$$f(s)/s = \frac{1}{(s-1)^{1-\alpha}} (e_0 + e_1(s-1) + \ldots + e_k(s-1)^k + \ldots) ,$$

on trouve pour $E'(x)$ le développement asymptotique

$$E'(x) = \frac{x}{\log^\alpha x} \left(c_0 + c_1/\log x + \ldots + c_k/\log^k x + O(1/\log^{k+1} x)\right),$$

avec

$$c_k = e_k/\Gamma(1 - k - \alpha) . \tag{2.9}$$

Remarques.

(1) En utilisant (1.6) on peut ramener le calcul des e_i et des c_i à celui, d'une part de séries absolument convergentes (donc évaluables numériquement), et d'autre part de *valeurs des dérivées des* $L(s, \chi)$ *au point* $s = 1$; pour un exemple de tel calcul, voir [24].

(2) La méthode de Landau suivie ci-dessus a l'avantage, non seulement de donner un développement asymptotique, mais encore de fournir un terme d'erreur que l'on peut *effectivement* majorer, pourvu bien sûr que l'on dispose de majorations effectives de $f(s)$, ce qui est le plus souvent faisable (mais rarement fait...). On ne peut rien déduire de tel des théorèmes taubériens à la Ikehara, du moins sous leur forme actuelle.

(3) A la place de l'intégrale de $f(s)\,x^s/s^2$, on pourrait songer à utiliser celle de $f(s)\,x^s/s$, qui conduit directement à $\sum_{n\leq x} b_n$. Malheureusement, il ne semble pas facile de majorer cette dernière intégrale sur les branches infinies C et D.

Voici maintenant une variante du théorème (2.8), dans le cas où l'ensemble P est frobénien de densité 1, i. e. de complémentaire fini:

THÉORÈME 2.10. *Supposons que E soit multiplicatif, et contienne tous les nombres premiers, à l'exception d'un nombre fini. Alors :*

(a) *On a* $E'(x) = O(x^{1/2})$.

(b) *Si l'ensemble des nombres premiers p tels que $p^2 \in E'$ est régulier de densité $\delta > 0$, on a*

$$E'(x) \sim cx^{1/2}/\log^{1-\delta}x\,, \qquad \textit{avec} \quad c > 0\,.$$

L'assertion (a) est facile, et peut d'ailleurs se ramener à (b). Plaçons-nous donc dans le cas (b), et posons ici encore

$$f(s) = \sum_{n\in E'} n^{-s} = \sum b_n n^{-s}\,.$$

Les hypothèses faites sur E entraînent que

$$\log f(s) = \sum_{p^2\in E'} p^{-2s} + \theta_1(s) = \delta \log 1/(2s-1) + \theta_2(s)\,,$$

où les $\theta_i(s)$ sont holomorphes pour $\mathscr{R}(s) \geqslant 1/2$. Il en résulte que

$$f(s/2) = \frac{1}{(s-1)^\delta}\,h(s)\,,$$

où $h(s)$ est holomorphe et $\neq 0$ pour $\mathscr{R}(s) \geqslant 1$. En appliquant à $f(s/2)$ les théorèmes taubériens cités plus haut (cf. [2], [14], [29]), on en déduit

$$\sum_{\sqrt{n}<x} b_n \sim c_1 x/\log^{1-\delta}x\,, \quad \text{avec } c_1 = h(1)/\Gamma(\delta)\,;$$

en remplaçant x par $x^{1/2}$, on obtient le résultat cherché:

$$E'(x) \sim cx^{1/2}/\log^{1-\delta}x\,, \qquad \text{avec } c = 2^{1-\delta}c_1\,.$$

Remarque. Dans le cas (b), si l'ensemble des p tels que $p^2 \in E'$ est *frobénien*, on peut utiliser la méthode de Landau pour obtenir un développement asymptotique de $E'(x)$.

Exemple. Prenons pour E l'ensemble des entiers de la forme pm, avec p premier, et $(p, m) = 1$; l'ensemble E' est formé des entiers $n \geqslant 1$ tels que $p \mid n \Rightarrow p^2 \mid n$ pour tout p premier; les hypothèses de (2.10 b) sont vérifiées avec $\delta = 1$. On a

$$\begin{aligned} f(s) &= \prod_p (1 + p^{-2s} + p^{-3s} + p^{-4s} + \ldots) = \prod_p \frac{1 - p^{-s} + p^{-2s}}{1 - p^{-s}} \\ &= \prod_p \frac{1 + p^{-3s}}{1 - p^{-2s}} = \prod_p \frac{1 - p^{-6s}}{(1 - p^{-2s})(1 - p^{-3s})} \\ &= \zeta(2s)\,\zeta(3s)/\zeta(6s)\,. \end{aligned}$$

D'après (2.10 b), on a $E'(x) \sim cx^{1/2}$, avec $c = \zeta(3/2)/\zeta(3)$. On connaît en fait des résultats bien plus précis, par exemple celui-ci (Bateman-Grosswald, *Illinois J. Math.*, 2, 1958):

$$E'(x) = cx^{1/2} + dx^{1/3} + O\left(x^{1/6} \exp(-A \log^B x)\right), \qquad \text{avec } A, B > 0\,.$$

§ 3. PREMIERS EXEMPLES

3.1. *Sommes de deux carrés.* C'est l'exemple traité initialement par Landau [8] (voir aussi [6], [24], [26]):

On prend pour E' l'ensemble des entiers $n \geqslant 1$ qui sont de la forme $a^2 + b^2$, avec $a, b \in \mathbf{Z}$ (ou $a, b \in \mathbf{Q}$, cela revient au même); on a ainsi:

$$E'(x) = N\{n \leqslant x : \; n = \boxed{2}\}\,.$$

Soit P l'ensemble des nombres premiers p tels que $p \equiv -1 \pmod 4$. On sait qu'un entier n appartient à E' si et seulement si, pour tout $p \in P$, l'exposant $v_p(n)$ de p dans n est pair. Il en résulte que le complémentaire E de E' est multiplicatif (au sens du § 2), et que P est l'ensemble des nombres premiers appartenant à E. Comme P est frobénien de densité 1/2, le théorème (2.8) montre l'existence de constantes $c_0, c_1, \ldots$ telles que

$$E'(x) = \frac{x}{\sqrt{\log x}} \left(c_0 + c_1/\log x + \ldots + c_k/\log^k x + O(1/\log^{k+1} x)\right)$$

pour tout $k > 0$. On trouvera dans Shanks [24] (rectifiant Ramanujan [6]