Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 22 (1976)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CLASSICAL THEOREMS ON QUADRATIC RESIDUES
Autor: Berndt, Bruce C.
Kapitel: 10. SUMS OVER INTERVALS OF LENGTH k/16
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-48188

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

10. Sums over intervals of length $k/16$

Although $S_{16,i}$, $1 \leq i \leq 8$, may be expressed in terms of Dirichlet L-functions at the value 1 by the methods of the previous sections, in each case, L-functions with complex characters arise. Thus, our methods do not enable us to make any conclusions about the sign of $S_{16,i}$, $1 \leq i \leq 8$. However, we are able to prove the following result.

Theorem 10.1. Let χ be even and put $\chi_{4k} = \chi_4 \chi$ and $\chi_{8k} = \chi_4 \chi_8 \chi$. Then

$$S_{16,1} + S_{16,8} = \frac{G(\chi)}{2\pi} \{ \bar{\chi}(4) L(1, \bar{\chi}_{4k}) + 2^{1/2} \bar{\chi}(2) L(1, \bar{\chi}_{8k}) \},$$

$$S_{16,2} + S_{16,7} = \frac{G(\chi)}{2\pi} \{ [2\bar{\chi}(2) - \bar{\chi}(4)] L(1, \bar{\chi}_{4k}) - 2^{1/2} \bar{\chi}(2) L(1, \bar{\chi}_{8k}) \},$$

$$S_{16,3} + S_{16,6} = \frac{G(\chi)}{2\pi} \{ - [2\bar{\chi}(2) + \bar{\chi}(4)] L(1, \bar{\chi}_{4k}) + 2^{1/2} \bar{\chi}(2) L(1, \bar{\chi}_{8k}) \},$$

and

$$S_{16,4} + S_{16,5} = \frac{G(\chi)}{2\pi} \{ \bar{\chi}(4) L(1, \bar{\chi}_{4k}) - 2^{1/2} \bar{\chi}(2) L(1, \bar{\chi}_{8k}) \}.$$

Let χ be odd and put $\chi_{8k} = \chi_8 \chi$. Then

$$S_{16,1} - S_{16,8} = \frac{G(\chi)}{2\pi i} \{ [2\bar{\chi}(2) + \bar{\chi}(4) + \bar{\chi}(8)] [1 - \frac{1}{2} \bar{\chi}(2)] L(1, \bar{\chi}) - 2^{1/2} \bar{\chi}(2) L(1, \bar{\chi}_{8k}) \},$$

$$S_{16,2} - S_{16,7} = \frac{G(\chi)}{2\pi i} \{ [\bar{\chi}(4) - \bar{\chi}(8)] [1 - \frac{1}{2} \bar{\chi}(2)] L(1, \bar{\chi}) + 2^{1/2} \bar{\chi}(2) L(1, \bar{\chi}_{8k}) \},$$

$$S_{16,3} - S_{16,6} = \frac{G(\chi)}{2\pi i} \{ [\bar{\chi}(8) - \bar{\chi}(4)] [1 - \frac{1}{2} \bar{\chi}(2)] L(1, \bar{\chi}) + 2^{1/2} \bar{\chi}(2) L(1, \bar{\chi}_{8k}) \},$$

and

$$S_{16,4} - S_{16,5} = \frac{G(\chi)}{2\pi i} \{ [2\bar{\chi}(2) - \bar{\chi}(4) - \bar{\chi}(8)] [1 - \frac{1}{2} \bar{\chi}(2)] L(1, \bar{\chi}) - 2^{1/2} \bar{\chi}(2) L(1, \bar{\chi}_{8k}) \} .$$

COROLLARY 10.2. If d is odd and positive, then

$$S_{16,1} + S_{16,8} > 0 , \quad \text{if} \quad \chi(2) = 1 ,$$

and

$$S_{16,4} + S_{16,5} > 0 , \quad \text{if} \quad \chi(2) = -1 .$$

If d is odd and negative, then

$$S_{16,2} - S_{16,7} > 0 , \quad \text{if} \quad \chi(2) = 1 ,$$

$$S_{16,3} - S_{16,6} > 0 , \quad \text{if} \quad \chi(2) = 1 ,$$

$$S_{16,3} - S_{16,6} < 0 , \quad \text{if} \quad \chi(2) = -1 ,$$

and

$$S_{16,4} - S_{16,5} < 0 , \quad \text{if} \quad \chi(2) = 1 .$$

11. SUMS OVER INTERVALS OF LENGTH $k/24$.

For intervals of length $k/24$, a complete statement of Theorem 11.1 for both even and odd characters would require 24 formulas. Because of limitations of space, we state just 2 of the formulas for $S_{24,i}(\chi)$, where $1 \leq i \leq 12$ and χ is even or odd.

THEOREM 11.1. Let χ be even. Let $\chi_{3k}(n) = \left(\frac{n}{3}\right) \chi(n)$, $\chi_{4k}(n) = \chi_4(n) \chi(n)$, $\chi_{8k}(n) = \chi_4(n) \chi_8(n) \chi(n)$, and $\chi_{24k}(n) = \left(\frac{n}{3}\right) \chi_8(n) \chi(n)$. Then

$$S_{24,1} = \frac{G(\chi)}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} \bar{\chi}(2) [1 + \bar{\chi}(3)] L(1, \bar{\chi}_{4k}) + \frac{1}{4} 3^{1/2} \bar{\chi}(4) [1 + \bar{\chi}(2)] L(1, \bar{\chi}_{3k}) + 2^{-1/2} [\bar{\chi}(3) - 1] L(1, \bar{\chi}_{8k}) + (3/2)^{1/2} L(1, \bar{\chi}_{24k}) \right\} .$$