3. The Basic Result

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1976)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

(2) $$x = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4}}{2}.$$

Suppose d is a positive integer which is not the square of an integer. The Diophantine equation

(3) $$x^2 - dy^2 = -1$$

is often called the non-Pellian equation. If the simple continued fraction for $\sqrt{d}$, which is necessarily periodic, has a period consisting of an odd number, m, of terms, then (3) has a solution. In this case every positive solution is of the form $x = A_i$, $y = B_i$, for $i = qm - 1$ with q odd.

3. The Basic Result

We use the above results to establish the Theorem. There exist infinitely many primes.

Proof. Assume that there are only finitely many primes $p_1, p_2, \ldots, p_t$ where $p_1 = 2$. Let $p = \prod_{i=1}^{t} p_i$ and $q = \prod_{i=2}^{t} p_i$ so that q is the product of the odd primes, and hence $q > 1$. Define x by (2). Then in terms of q we have

$$x = q + \sqrt{q^2 + 1}.$$

Since $q^2 + 1 > 1$ and $p_i \nmid (q^2+1)$ for $i = 2, 3, \ldots, t$ it follows that $q^2 + 1$ is a power of 2 since 2 is the only remaining prime. Moreover, $q^2 + 1$ must be an odd power of 2 since x is irrational. Thus $q^2 + 1 = 2^{2l+1}$ or

$$q^2 - 2(2^l)^2 = -1$$

and it follows that the non-Pellian equation

$$x^2 - 2y^2 = -1$$

have a solution $x = q$, $y = 2^l$. Hence $\frac{q}{2^l}$ is an even approximant to the continued fraction for $\sqrt{2}$. We have

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}$$

and using (1) we easily verify by induction, for this particular continued

fraction, that for every $m > 0$ B_{2m} is an odd integer greater than one. Therefore we must have

$$\frac{q}{2^l} = \frac{A_0}{B_0} = \frac{1}{1}$$

and $q = 1$ since $(q, 2^l) = 1$. This is a contradiction since $q > 1$. The same contradiction follows from $2^l = 1$ since this implies $l = 0$ and thus

$$q^2 + 1 = 2^{2l+1} = 2 .$$

REFERENCES

[1] BRAUN, J. Das Fortschreitungs-gesetz der Primzahlen durch eine transcendente Gleichung exakt dargestellt. *Wiss. Beilage Jahresbericht*, Gymm., Trier, 1899.

[2] KUMMER, E. *Monatsber. Akad. Wiss. Berlin für 1878, 1879, pp.* 777-8.

[3] PERRON, Oskar. *Die Lehre von den Kettenbrüchen.* Chelsea, New York, 1951.

[4] PÓLYA, G. and G. SZEGÖ. *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, vol. 2, pp. 133-142, Dover, New York, 1945.

[5] STIELTJES, T.J. *Annales fac sc. de Toulouse*, IV (1890).

(Reçu le 3 juillet 1976)

C.W. Barnes

Department of Mathematics
University of Mississippi
Mississippi, 38 677