# 1. Introduction

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1976)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

**Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

**http://www.e-periodica.ch**

# THE LIE BRACKET AND THE CURVATURE TENSOR

by Richard L. FABER

## 1. INTRODUCTION

The purpose of this paper is to present simple, coordinate-free proofs of well-known geometric interpretations (Theorems 1 and 2) of the Lie bracket and curvature tensor (in a $C^\infty$ -manifold with affine connection $\nabla$). These pertain to the traversal of "parallelogram-like" circuits. The standard demonstrations of these interpretations usually make use of finite Taylor expansions in some special coordinate systems (cf. [1, pp. 135-138] for the Lie bracket; [5, pp. 106-108] for the curvature tensor), or repeated application of the multivariable chain rule (cf. [2, pp. 18-19] and [6, pp. 5-38 to 5-42] for the bracket). Spivak ([6, pp. 5-41]) refers to his proof as "an horrendous, but clever, calculation." An application to Lie group theory is given in Corollary 1.

All functions, curves, and vector fields are $C^\infty$ on a $C^\infty$ manifold $M$. If $X$ is a vector field on $M$, then an *integral curve* of $X$ is a curve $\gamma$ (or $\gamma_X$) satisfying $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$, for all $t$ in domain $(\gamma)$. If, in addition, $\gamma(0) = p$, we say that $\gamma$ is an integral curve starting at $p$. We shall use $X_t$ to denote the *flow* of $X$, so that $X_t(p) = \gamma(t)$, where $\gamma$ is an integral curve of $X$ starting at $p$.

## 2. THE LIE BRACKET

If $f$ is a function on $M$, the following is immediate from applying Taylor's Theorem for functions of a real variable to the composition $f \cdot \gamma$, and observing that $(f \cdot \gamma)^{(k)} = X^k f \cdot \gamma$. Throughout this paper, $O(n)$ ($n$ a positive integer) denotes a quantity for which $O(n) / t^n$ is bounded for small $t$.

LEMMA 1. (Taylor's Theorem for integral curves). If $\gamma$ is an integral curve of a vector field $X$ and if $f$ is a real-valued function defined in a neighborhood of image $(\gamma)$, then

$$f(\gamma(t)) - f(\gamma(0)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k!} (X^k f)(\gamma(0)) + O(n+1)$$