Branchements de plans — Variétés régulières

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1976)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

SUR UN FEUILLETAGE DE $\mathbf{R}^3$

par Marc DIENER

L'étude des propriétés générales de l'espace des feuilles des feuilletages du plan réel a été faite par A. Haefliger et G. Reeb [1], E. Fedida et F. Pluvinage [2] ont donné un théorème permettant de déterminer, à homéomorphisme près, l'espace des feuilles d'un feuilletage du plan défini par une équation différentielle polynômiale par simple inspection de l'équation. Il ressort de ces études que l'espace des feuilles d'un feuilletage du plan est régulier: il se laisse toujours étaler sur la droite réelle. Cela résulte du fait que l'espace des feuilles d'un tel feuilletage est une variété topologique de dimension un — généralement non séparée — simplement connexe, donc composée de branchements simples de droites, et qu'une telle variété se laisse toujours étaler continument sur la droite réelle.

L'étude entamée par A. Sec [3] des feuilletages de dimension un de $\mathbf{R}^3$ défini par un système de deux équations différentielles polynômiales — ce que nous appelons les feuilletages polynômiaux et transverses (P & T) de $\mathbf{R}^3$ — révèle des similitudes entre l'espace des feuilles d'un tel feuilletage et celui d'un feuilletage du plan: il est encore simplement connexe et composé de *branchements de plans*. Les différences semblent, par contre, nombreuses; nous nous proposons d'examiner ci-dessous l'une d'entre elles: tout branchement de plans n'est pas nécessairement *régulier* (voir le *Branchement Pointé de Plans*) et nous verrons sur un exemple que, même pour des équations relativement simples, on peut trouver des feuilletages P & T non élémentaires, c'est-à-dire qu'ils ne sont pas de *type image-réciproque*.

BRANCHEMENTS DE PLANS — VARIÉTÉS RÉGULIÈRES

Nous appelons *branchement de plans* et notons $\sum(\varphi)$ la variété topologique obtenue en identifiant, dans la somme topologique de deux exemplaires P_1 et P_2 du plan réel, les points du demi-plan ouvert $H_1 = \{(u, v) \in P_1, u > 0\}$ de P_1 à leur image par un homéomorphisme φ de H_1 sur le demi-plan ouvert $H_2 = \{(u, v) \in P_2, u > 0\}$ de P_2. L'homéomorphisme φ s'appellera l'*homéomorphisme attachant*.

On dira qu'une variété V^n de dimension n est *régulière* s'il existe un étalement continu $h: V^n \to \mathbf{R}^n$.

Exemples :

Le *Branchement Simple de Plans* (BSP): c'est le branchement de plans obtenu en prenant l'identité pour homéomorphisme attachant. Il est homéomorphe au produit topologique du Branchement Simple (de droites) [1] et de la droite réelle. Le BSP est régulier.

Le *Branchement Pointé de Plans* (BPP): c'est le branchement de plans $\sum(\varphi_0)$ associé à l'homéomorphisme φ_0 de H_1 sur H_2 suivant: $\varphi_0(u, v)$

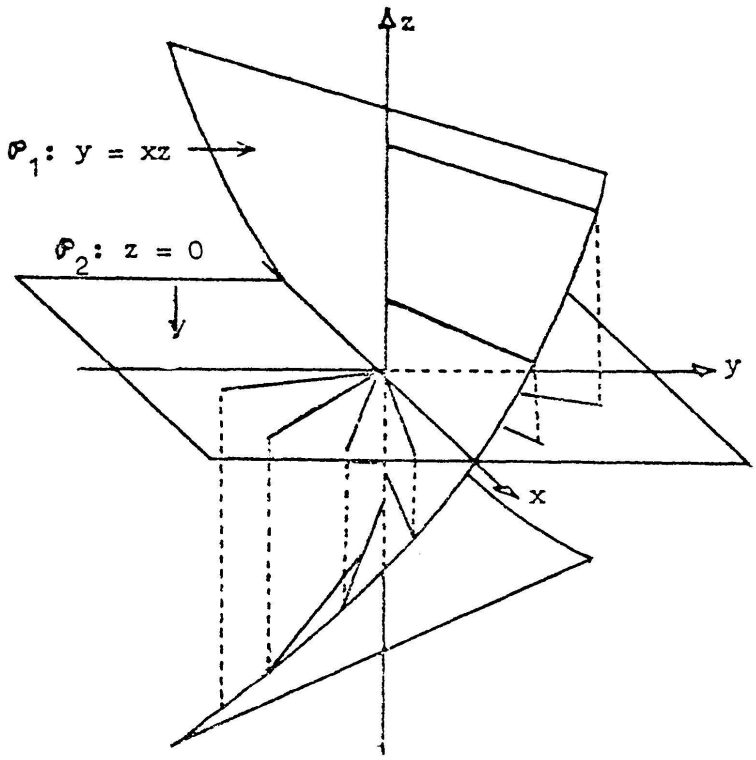

Fig. 1.

$= (u, uv)$. Il peut se visualiser de la façon suivante: Dans $\mathbf{R}^3$ xyz soient $\mathscr{P}_1$ le paraboloïde-hyperbolique d'équation $y = xz$ et $\mathscr{P}_2$ le plan horizontal d'équation $z = 0$ (voir figure 1); $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont homéomorphes au plan réel. On obtient le BPP en identifiant, dans la somme disjointe de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ les paires de points situés sur une même verticale du demi-espace ouvert $\mathscr{U}$ des $x > 0$. On voit que, dans le BPP, lorsque l'on tend dans $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{U}$ vers un point quelconque de la droite verticale $\mathscr{D}_1$ d'équations $x = y = 0$ de $\mathscr{P}_1$, on tend simultanément vers le point $\mathcal{O}_2$ de coordonnées $(0, 0, 0)$ de $\mathscr{P}_2$. En d'autres termes, dans $\sum(\varphi_0)$, tous les points de la droite D_1 d'équation

$u = 0$ de P_1 sont non séparés du point $0_2 = (0, 0)$ de P_2. Toute application continue $h : \sum(\varphi_0) \to \mathbf{R}^2$ sera donc constante sur D_1, avec $h(D_1) = \{h(0_2)\}$. On en déduit que le BPP n'est pas régulier.

Feuilletages polynômiaux et transverses et feuilletages de type image-réciproque

Nous appelons *feuilletage polynômial et transverse* (P & T) de $\mathbf{R}^3$ tout feuilletage de dimension un de $\mathbf{R}^3$ dont les feuilles sont les trajectoires (courbes intégrales) d'un champ de vecteurs du type suivant:

$$\begin{aligned} x' &= 1 \\ y' &= f(x, y, z) \\ z' &= g(x, y, z) \end{aligned}$$

où f et g sont des polynômes en x, y et z.

On dira qu'un feuilletage $\mathscr{F}$ de $\mathbf{R}^{n+1}$ est de *type image-réciproque* s'il existe une submersion topologique [1]) $p : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^n$ constante sur les feuilles de $\mathscr{F}$.

Remarque: Si $p : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^n$ est une submersion topologique, les composantes connexes des images réciproques par p des éléments de $\mathbf{R}^n$ constituent les feuilles d'un feuilletage de dimension un de $\mathbf{R}^{n+1}$. Un feuilletage est donc de type image-réciproque s'il peut être obtenu de cette manière. La notion de feuilletage de type image-réciproque constitue une généralisation naturelle aux feuilletages de dimension un de $\mathbf{R}^{n+1}$ de la notion d'intégrale première d'un champ de vecteurs de $\mathbf{R}^2$. Elle est liée à la notion de variété régulière: un feuilletage $\mathscr{F}$ de $\mathbf{R}^{n+1}$ est de type image-réciproque si et seulement si son espace des feuilles est régulier. On sait [1] que l'espace des feuilles de tout feuilletage de $\mathbf{R}^2$ est régulier. Un feuilletage de $\mathbf{R}^2$ est donc toujours de type image-réciproque. D'autre part, on déduit facilement de la théorie générale des équations différentielles linéaires que si les polynômes f et g définissant un feuilletage P & T de $\mathbf{R}^3$ sont de degré total en y et z inférieur ou égal à un, alors l'espace des feuilles de ce feuille-

[1]) On entend par submersion topologique p de $\mathbf{R}^{n+1}$ dans $\mathbf{R}^n$ une application continue telle que tout point de $\mathbf{R}^{n+1}$ admet un voisinage sur lequel est défini un homéomorphisme k sur un ouvert de $\mathbf{R}^{n+1}$, tel que $p \circ k^{-1}$ soit égal à la projection sur les n premières coordonnées. En particulier, toute submersion (différentiable) est une submersion topologique.