Feuilletages polynômiaux et transverses et feuilletages de type image-réciproque

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1976)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **04.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

$u = 0$ de P_1 sont non séparés du point $0_2 = (0, 0)$ de P_2. Toute application continue $h : \sum(\varphi_0) \to \mathbf{R}^2$ sera donc constante sur D_1, avec $h(D_1) = \{h(0_2)\}$. On en déduit que le BPP n'est pas régulier.

Feuilletages polynômiaux et transverses et feuilletages de type image-réciproque

Nous appelons *feuilletage polynômial et transverse* (P & T) de $\mathbf{R}^3$ tout feuilletage de dimension un de $\mathbf{R}^3$ dont les feuilles sont les trajectoires (courbes intégrales) d'un champ de vecteurs du type suivant:

$$\begin{aligned} x' &= 1 \\ y' &= f(x, y, z) \\ z' &= g(x, y, z) \end{aligned}$$

où f et g sont des polynômes en x, y et z.

On dira qu'un feuilletage $\mathscr{F}$ de $\mathbf{R}^{n+1}$ est de *type image-réciproque* s'il existe une submersion topologique [1]) $p : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^n$ constante sur les feuilles de $\mathscr{F}$.

Remarque: Si $p : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^n$ est une submersion topologique, les composantes connexes des images réciproques par p des éléments de $\mathbf{R}^n$ constituent les feuilles d'un feuilletage de dimension un de $\mathbf{R}^{n+1}$. Un feuilletage est donc de type image-réciproque s'il peut être obtenu de cette manière. La notion de feuilletage de type image-réciproque constitue une généralisation naturelle aux feuilletages de dimension un de $\mathbf{R}^{n+1}$ de la notion d'intégrale première d'un champ de vecteurs de $\mathbf{R}^2$. Elle est liée à la notion de variété régulière: un feuilletage $\mathscr{F}$ de $\mathbf{R}^{n+1}$ est de type image-réciproque si et seulement si son espace des feuilles est régulier. On sait [1] que l'espace des feuilles de tout feuilletage de $\mathbf{R}^2$ est régulier. Un feuilletage de $\mathbf{R}^2$ est donc toujours de type image-réciproque. D'autre part, on déduit facilement de la théorie générale des équations différentielles linéaires que si les polynômes f et g définissant un feuilletage P & T de $\mathbf{R}^3$ sont de degré total en y et z inférieur ou égal à un, alors l'espace des feuilles de ce feuille-

[1]) On entend par submersion topologique p de $\mathbf{R}^{n+1}$ dans $\mathbf{R}^n$ une application continue telle que tout point de $\mathbf{R}^{n+1}$ admet un voisinage sur lequel est défini un homéomorphisme k sur un ouvert de $\mathbf{R}^{n+1}$, tel que $p \circ k^{-1}$ soit égal à la projection sur les n premières coordonnées. En particulier, toute submersion (différentiable) est une submersion topologique.

tage est homéomorphe à $\mathbf{R}^2$, donc que le feuilletage est de type image-réciproque.

Le feuilletage ci-dessous montre que dès que f et g sont de degré total en y et z supérieur à un, le feuilletage P & T de $\mathbf{R}^3$ qu'ils permettent de définir peut ne plus être de type image-réciproque.

Exemple de feuilletage P & T de $\mathbf{R}^3$ qui n'est pas de type image-réciproque

Soit $\mathscr{F}_0$ le feuilletage P & T de $\mathbf{R}^3$ associé au champ de vecteurs

$$\begin{aligned} x' &= 1 \\ y' &= 2x(y^2+1) \\ z' &= 2yz\,. \end{aligned}$$

Effectuons un changement de variables. En posant

$$x = X\,,\ y = tg\,(X^2+Y) \quad \text{et} \quad z = tg\,Z$$

on ramène $\mathbf{R}^3\,xyz$ sur l'ouvert $A = \left\{(X, Y, Z) \in \mathbf{R}^3, \left| X^2 + Y \right| < \frac{\pi}{2}, \left| Z \right| < \frac{\pi}{2}\right\}$ (voir figure 2), transformant ainsi les feuilles de $\mathscr{F}_0$ en les trajectoires contenues dans A du champ de vecteurs de $\mathbf{R}^3\,XYZ$

$$\begin{aligned} X' &= \cos\,(X^2+Y) \\ Y' &= 0 \\ Z' &= \sin\,2Z \cdot \sin\,(X^2+Y)\,. \end{aligned}$$

De l'étude du signe des composantes de ce champ et de ses trajectoires (évidentes) dans la frontière de A, on déduit que ses trajectoires dans A ont le comportement indiqué ci-dessous, selon le plan d'équation Y = constante = Y_0 dans lequel elles sont contenues. On voit que tout voisinage saturé (i.e. réunion de trajectoires) de la trajectoire γ_0 rencontre nécessairement tout voisinage d'une trajectoire quelconque γ_1 contenue dans la région hachurée $\mathscr{R}$. On en déduit que toute application continue de A dans $\mathbf{R}^2$, constante sur les trajectoires, sera nécessairement constante sur $\mathscr{R}$ et donc ne sera pas une submersion topologique. Le feuilletage a bien la propriété annoncée.