Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 22 (1976)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR UN FEUILLETAGE DE R^3

Autor: Diener, Marc

Kapitel: Feuilletages polynômiaux et transverses et feuilletages de type image-réciproque

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-48174

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

$u = 0$ de P_1 sont non séparés du point $0_2 = (0, 0)$ de P_2. Toute application continue $h : \sum(\varphi_0) \to \mathbf{R}^2$ sera donc constante sur D_1, avec $h(D_1) = \{h(0_2)\}$. On en déduit que le BPP n'est pas régulier.

Feuilletages polynômiaux et transverses et feuilletages de type image-réciproque

Nous appelons *feuilletage polynômial et transverse* (P & T) de $\mathbf{R}^3$ tout feuilletage de dimension un de $\mathbf{R}^3$ dont les feuilles sont les trajectoires (courbes intégrales) d'un champ de vecteurs du type suivant:

$$\begin{aligned} x' &= 1 \\ y' &= f(x, y, z) \\ z' &= g(x, y, z) \end{aligned}$$

où f et g sont des polynômes en x, y et z.

On dira qu'un feuilletage $\mathscr{F}$ de $\mathbf{R}^{n+1}$ est de *type image-réciproque* s'il existe une submersion topologique [1]) $p : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^n$ constante sur les feuilles de $\mathscr{F}$.

Remarque: Si $p : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^n$ est une submersion topologique, les composantes connexes des images réciproques par p des éléments de $\mathbf{R}^n$ constituent les feuilles d'un feuilletage de dimension un de $\mathbf{R}^{n+1}$. Un feuilletage est donc de type image-réciproque s'il peut être obtenu de cette manière. La notion de feuilletage de type image-réciproque constitue une généralisation naturelle aux feuilletages de dimension un de $\mathbf{R}^{n+1}$ de la notion d'intégrale première d'un champ de vecteurs de $\mathbf{R}^2$. Elle est liée à la notion de variété régulière: un feuilletage $\mathscr{F}$ de $\mathbf{R}^{n+1}$ est de type image-réciproque si et seulement si son espace des feuilles est régulier. On sait [1] que l'espace des feuilles de tout feuilletage de $\mathbf{R}^2$ est régulier. Un feuilletage de $\mathbf{R}^2$ est donc toujours de type image-réciproque. D'autre part, on déduit facilement de la théorie générale des équations différentielles linéaires que si les polynômes f et g définissant un feuilletage P & T de $\mathbf{R}^3$ sont de degré total en y et z inférieur ou égal à un, alors l'espace des feuilles de ce feuille-

[1]) On entend par submersion topologique p de $\mathbf{R}^{n+1}$ dans $\mathbf{R}^n$ une application continue telle que tout point de $\mathbf{R}^{n+1}$ admet un voisinage sur lequel est défini un homéomorphisme k sur un ouvert de $\mathbf{R}^{n+1}$, tel que $p \circ k^{-1}$ soit égal à la projection sur les n premières coordonnées. En particulier, toute submersion (différentiable) est une submersion topologique.

tage est homéomorphe à $\mathbf{R}^2$, donc que le feuilletage est de type image-réciproque.

Le feuilletage ci-dessous montre que dès que f et g sont de degré total en y et z supérieur à un, le feuilletage P & T de $\mathbf{R}^3$ qu'ils permettent de définir peut ne plus être de type image-réciproque.

Exemple de feuilletage P & T de $\mathbf{R}^3$ qui n'est pas de type image-réciproque

Soit $\mathscr{F}_0$ le feuilletage P & T de $\mathbf{R}^3$ associé au champ de vecteurs

$$\begin{aligned} x' &= 1 \\ y' &= 2x(y^2+1) \\ z' &= 2yz\,. \end{aligned}$$

Effectuons un changement de variables. En posant

$$x = X\,,\ y = tg\,(X^2+Y) \quad \text{et} \quad z = tg\,Z$$

on ramène $\mathbf{R}^3\,xyz$ sur l'ouvert $A = \left\{(X, Y, Z) \in \mathbf{R}^3, \left| X^2 + Y \right| < \frac{\pi}{2}, \left| Z \right| < \frac{\pi}{2}\right\}$ (voir figure 2), transformant ainsi les feuilles de $\mathscr{F}_0$ en les trajectoires contenues dans A du champ de vecteurs de $\mathbf{R}^3\,XYZ$

$$\begin{aligned} X' &= \cos\,(X^2+Y) \\ Y' &= 0 \\ Z' &= \sin\,2Z \cdot \sin\,(X^2+Y)\,. \end{aligned}$$

De l'étude du signe des composantes de ce champ et de ses trajectoires (évidentes) dans la frontière de A, on déduit que ses trajectoires dans A ont le comportement indiqué ci-dessous, selon le plan d'équation Y = constante = Y_0 dans lequel elles sont contenues. On voit que tout voisinage saturé (i.e. réunion de trajectoires) de la trajectoire γ_0 rencontre nécessairement tout voisinage d'une trajectoire quelconque γ_1 contenue dans la région hachurée $\mathscr{R}$. On en déduit que toute application continue de A dans $\mathbf{R}^2$, constante sur les trajectoires, sera nécessairement constante sur $\mathscr{R}$ et donc ne sera pas une submersion topologique. Le feuilletage a bien la propriété annoncée.