**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 22 (1976)

**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** APPLICATIONS POLYNÔMIALES DE DEGRÉ DEUX DU PLAN PROJECTIF COMPLEXE DANS LUI-MÊME

**Autor:** Ronga, Felice

**Kapitel:** 4. Groupes d'isotropie

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-48175

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 04.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

ment triviale. Donc $f$ est $C^\infty$-équivalente aux applications qui lui sont proches. L'affirmation que $f$ et $g$ sont $C^\infty$-équivalentes suit du fait que les applications de type I forment un ouvert de Zariski, donc connexe, de $P\mathbf{C}^{17}$.

## 4. Groupes d'isotropie

Soit $f$: $P\mathbf{C}^2 \to P\mathbf{C}^2$. On pose $G_f = \{(h, H) \in \mathrm{Aut}\,(P\mathbf{C}^2) \times \mathrm{Aut}\,(P\mathbf{C}^2) \mid H.f.h^{-1} = f\}$. On va déterminer $G_f$ lorsque $f$ est de degré deux; sauf si $f$ est de type deux, il se trouve que si $h$ est un automorphisme qui laisse invariantes les singularités de $f$, il existe un unique $H$ tel que $(h, H) \in G_f$.

4.1. Proposition. I) *Si* $t \neq -10 \pm (108)^{\frac{1}{2}}$, *le groupe d'isotrophie de* $f_t^I$ *est engendré par les paires*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u^{-1} \\ 0 & u & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u^{-2} \\ 0 & u^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & v & 0 \\ v^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & v^2 & 0 \\ v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*et*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & u^{-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ u & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & u^{-2} \\ 0 & 1 & 0 \\ u^2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

*où* $u$ *et* $v$ *sont les solutions de* $u^3 = t$ *et* $v^3 = 1$. *En fait, la troisième paire s'écrit comme composition des deux premières. Ce groupe est d'ordre* 18.

*Si* $t = -10 \pm (108)^{\frac{1}{2}}$, *on peut ajouter la paire* $(h, H)$, *où* $h$ *est l'automorphisme qui s'écrit, dans les coordonnées introduites sous* 2.6., $(z_0, z_1, z_2) \to (z_0, i.z_1, z_2)$, *et* $H$ *est construit selon le corollaire* 2.5. *appliqué à* $f_t.h^{-1}$ *et* $f_t$ *afin que* $H.f_t.h^{-1} = f_t$. *Le groupe d'isotropie est ici d'ordre* 36.

II) *Le groupe d'isotropie de* $f^{II}$ *est engendré par :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & v^2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & v^2 & 0 \\ 0 & 0 & v \end{pmatrix} \quad et \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*où* $v^3 = 1$. *Il est d'ordre 6.*

III) *Le groupe d'isotropie de* $f^{III}$ *est engendré par*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^4 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix} \quad et \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*où* $x$ *est un nombre complexe non nul.*

IV) *Le groupe d'isotropie de* $f^{IV}$ *est engendré par*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & y^2 \end{pmatrix} \quad et \quad (A_s, A_s),$$

*où* $x$ *et* $y$ *sont des nombres complexes non nuls et* $A_s(z_0, z_1, z_2) = (z_{s(0)}, z_{s(1)}, z_{s(2)})$, *où* $s$ *parcourt les permutations de* $(0, 1, 2)$.

Démonstration: On vérifie que les automorphismes décrits laissent invariantes les applications en question.

I) Si $t \neq -10 \pm (108)^{\frac{1}{2}}$ et $t \neq -4$, il ne peut y avoir d'autres automorphismes laissant $f_t^I$ invariante, puisque la projection du groupe décrit sur le premier facteur de $\mathrm{Aut}\,(P\mathbf{C}^2) \times \mathrm{Aut}\,(P\mathbf{C}^2)$ donne tous les automorphismes qui laissent $\sum(f_t^I)$ invariante (voir remarque 2.7). Si $t = -4$, on a des automorphismes supplémentaires, mais ils ne laissent pas $\sum^{1,1}(f_t^I)$ invariant et ne donnent donc rien de nouveau.

Si $t = -10 \pm (108)^{\frac{1}{2}}$ par contre, l'automorphisme qui échange $q_1$ et $q_2$ (notations de 2.7) laisse $p \in \sum^{1,1}(f_t^I)$ fixe et donne lieu, ainsi qu'on l'a énoncé, à un nouvel élément de $G_{f_t^I}$.

Pour II, III et IV les affirmations se vérifient facilement.

4.2. Théorème. *Soit* $f : P\mathbf{C}^2 \to P\mathbf{C}^2$ *une application de degré deux. Si* $f$ *est de type I, elle est* $C^\infty$*-stable. Si elle est de type III ou IV, elle est stable dans les applications* $G_f$*-équivariantes.*
*Si elle est de type* II, *elle n'est pas* $G_f$*-stable.*

Démonstration: Les applications de type I forment un ouvert; leur $C^\infty$-stabilité suit alors de 3.3.

Si $f$ est de type III, son groupe d'isotropie est de dimension un et son lieu singulier est la réunion de trois droites $d_0$, $d_1$ et $d_2$. Si $g$ est $G_f$ équivariante, son groupe d'isotropie est de dimension un ou deux. Supposons que $\dim(\ker(df_p)) = 1$, où $p = d_0 \cap d_1$; si $g$ est assez proche de $f$, $\dim(\ker(dg_q)) \leqslant 1$, pour $q$ dans un voisinage de $p$, donc $g$ ne peut être de type IV et doit donc être de type III.

Si $f$ est de type IV, son groupe d'isotropie est de dimension deux, de même que pour toute autre application $g$ $G_f$-équivariante. $g$ doit donc être aussi de type IV.

Si

$$f(z_0, z_1, z_2) = (z_0^2, z_1^2 + z_0 . z_2, z_2^2 + z_0 . z_1),$$

l'application

$$(z_0^2 + t . z_1 . z_2, z_1^2 + z_0 . z_2, z_2^2 + z_0 . z_1),$$

pour $t$ petit, est proche de $f$ et $G_f$-équivariante, mais de type I, donc non équivalente à $f$.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] RONGA, F. Le calcul des classes duales aux singularités de Boardman d'ordre deux. *Commentarii Matematici Helvetici*, *47*, 1 (1972), pp. 15-35.

[2] VAN DER WAERDEN, B.L. *Einführung in die algebraische Geometrie*. Zweite Auflage, Springer Verlag, 1973.

*(Reçu le 15 octobre 1975)*

Felice Ronga

Section de Mathématiques
2-4, rue du Lièvre
1211 Genève 24