

## §4. An Essential Cluster Set Example

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1976)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **05.06.2024**

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$f_0(z) = \begin{cases} 0 & \text{for } z \in A \\ 1 & \text{for } z = z_n (n = 1, 2, \dots) \end{cases}$$

Then let  $f$  be a continuous extension of  $f_0$  to all of  $H$ . We now show that  $f$  is the desired function.

Let  $Q$  be a residual subset of  $R$ . Then, for each integer  $n$ , the set  $Q_n = Q \cap [3n/4, 3(n+1)/4]$  is a residual subset of the closed interval  $[3n/4, 3(n+1)/4]$ . As a consequence of (III) for  $\xi = \xi_n$ , there exists a residual set of directions  $\Theta_n \subset \{\theta : 3n/2 \leq \cot \theta \leq 3(n+1)/2\}$  such that, for each  $\theta \in \Theta_n$ , there exists a segment in  $A$  emanating from a point of  $Q_n$  and having the direction  $\theta$ . Therefore, the set  $\bigcap_{x \in Q} \Theta(x)$  is of the first category on the set  $\{\theta : 3n/2 \leq \cot \theta \leq 3(n+1)/2\}$  for each integer  $n$ , and the theorem is proved.

#### §4. AN ESSENTIAL CLUSTER SET EXAMPLE

If  $f$  is a measurable function from  $H$  to  $W$ , then the *essential cluster set*  $C_e(f, x)$  of  $f$  at  $x$  is defined as the set of all values  $w \in W$  for which the upper density of  $f^{-1}(U)$  at  $x$  is positive for every open set  $U$  containing  $w$ ; the *essential cluster set*  $C_e(f, x, \theta)$  of  $f$  at  $x$  in the direction  $\theta$  is the set of all values  $w \in W$  for which the upper density of  $f^{-1}(U)$  along the ray at  $x$  having direction  $\theta$  is positive for every open set  $U$  containing  $w$ . As a supplement to a result of Casper Goffman and W. T. Sledd [4, Theorem 2], the present authors [1] proved the following result concerning the set

$$\Theta^*(x) = \{\theta : C_e(f, x) \subset C_e(f, x, \theta)\} \quad (x \in R).$$

**THEOREM B.E.H.** *If  $f: H \rightarrow W$  is measurable, then  $\mu(\Theta^*(x)) = \pi$  for almost every and nearly every  $x \in R$ ; furthermore, if  $f$  is continuous, then  $\Theta^*(x)$  is residual for almost every and nearly every  $x \in R$ .*

Again, a natural question to ask is whether or not, for a given function  $f$ , there exists a “large” set of directions  $\Theta^*$  such that  $\Theta^* \subset \Theta^*(x)$  for a “large” set of points  $x \in R$ . As a partial answer, we prove

**THEOREM 2.** *There exists a continuous  $f: H \rightarrow W$  such that the intersection  $\bigcap_{x \in Q} \Theta^*(x)$  is (a) of the first category if  $Q \subset R$  is residual, and (b) of measure zero if  $Q \subset R$  is of full measure.*

*Proof.* Let  $\Delta$  be as in the proof of Theorem 1, and let  $S$  be a closed subset of  $H - \Delta$  that has metric density 1 at each  $x \in R$ . Let  $f$  be a continuous function on  $H$  with  $f(\Delta) = \{0\}$  and  $f(S) = \{1\}$ . Then the proof of (a) is completely analogous to the proof of Theorem 1, and the proof of (b) follows the same line with property (IV) used in place of property (III).

#### REFERENCES

- [1] BELNA, C. L., M. J. EVANS and P. D. HUMKE. Most directional cluster sets have common values. *Fund. Math. To appear.*
- [2] BRUCKNER, A. M. and Casper GOFFMAN. The boundary behavior of real functions in the upper half plane. *Rev. Roumaine Pures Appl.*, XI (1966), pp. 507-518.
- [3] COLLINGWOOD, E. F. Cluster sets and prime ends. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI*, No. 250/6 (1958), 12 pp.
- [4] GOFFMAN, Casper and W. T. SLEDD. Essential cluster sets. *J. London Math. Soc.* (2), 1 (1969), pp. 295-302.
- [5] KAHANE, J.-P. Trois notes sur les ensembles parfaits linéaires. *Enseignement Math.* 15 (1969), pp. 185-192.

(Reçu le 3 avril 1976)

C. L. Belna, M. J. Evans and P. D. Humke

Department of Mathematics  
Western Illinois University  
Macomb, Illinois 61455  
U.S.A.