§4. The proof of the theorem

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1977)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

$$\left| f - \sum_{q=1}^{2n+1} h(t_q) \right| \leqslant (n+1)\rho + n \frac{2}{2n+1} \|f\| .$$

But $\lim_{\delta \to 0} \rho = 0$, consequently for sufficiently small δ and $\varepsilon < \frac{1}{2n+2}$

$$\left| f - \sum_{q=1}^{2n+1} h(t_q) \right| < (1-\varepsilon) \|f\| .$$

The lemma is proved.

§ 4. *The proof of the theorem*

We denote by F a countable set, everywhere dense in $C(\mathscr{I}^n)$. We choose ε satisfying the condition of lemma 3.3.1 and consider Ω_{f_k} $(f_k \in F)$ corresponding to this ε and the collection λ_p mentioned in the theorem. The sets $\{\Omega_{fk}\}$ are open and by lemma 3.3.1 they are everywhere dense in Φ^{2n+1}. Consequently, according to the definition, almost every element of Φ^{2n+1} belongs to $\Phi^* = \bigcap_{f_k \in F} \Omega_{f_k}$.

We fix a collection $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{2n+1}\} \in \Phi^*$ and a function $f \in C(\mathscr{I}^n)$ and show that the desired representation of f takes place. If $f \equiv 0$ then as the function g we can take $g \equiv 0$. We will assume below that $f \not\equiv 0$. According to the definition of Ω_{f_k} there exists for any $f_k \in F$ a function h_k such that $\left| f_k - \sum_{q=1}^{2n+1} h_k \left(\sum_{p=1}^{n} \lambda_p \varphi_q(x_p) \right) \right| \leqslant (1-\varepsilon) \|f_k\|$. The set F is everywhere dense in $C(\mathscr{I}^n)$. Consequently for any $f \in C(\mathscr{I}^n)$ $(f \not\equiv 0)$ there exists $h = \gamma(f)$ such that

$$\left| f - \sum_{q=1}^{2n+1} h \left(\sum_{p=1}^{n} \lambda_p \varphi_q(x_p) \right) \right| < \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \|f\| .$$

We define the sequence of functions $\chi_0, \chi_1, \chi_2, \ldots$ by the recurrent equalities

$$\chi_0 = f, \quad \chi_{k+1} = \chi_k - \sum_{q=1}^{2n+1} g_k \left(\sum_{p=1}^{n} \lambda_p \varphi_q(x_p) \right),$$

where $g_k = \gamma(\chi_k)$. The series $\sum_{k=0}^{\infty} g_k$ converges uniformly and consequently the function $g = \sum_{k=0}^{\infty} g_k$ is continuous and

$$f - \sum_{q=1}^{2n+1} g \left(\sum_{p=1}^{n} \lambda_p \varphi_q(x_p) \right) = 0 .$$

The theorem is proved.