PROFILS ET RÉDUITE TRANSJORDANIENNE D'UNE MATRICE CARRÉE

Autor(en): **Fontaine, André**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1977)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-48921

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

PROFILS ET RÉDUITE TRANSJORDANIENNE D'UNE MATRICE CARRÉE

par André FONTAINE

I. ITÉRATION D'UN ENDOMORPHISME (SINGULIER)

Rappel. Propriétés classiques des noyaux itérés

E_n étant un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbf{C}$, soit g un endomorphisme de E_n dans E_n; nous le supposons singulier, c'est-à-dire dim Ker $(g) \geqslant 1$; Ker (g) est le sous-espace propre afférent à la valeur propre $\lambda = 0$ de g.

A) On considère la suite des « noyaux itérés de g »:

(1) $$\mathrm{Ker}\,(g) = K_1\,,\ \mathrm{Ker}\,(g^2) = K_2, \ldots, \mathrm{Ker}\,(g^q) = K_q, \ldots$$

On sait que ces noyaux sont emboîtés, $K_q \subset K_{q+1}$. La suite des dimensions de ces noyaux est croissante:

(2) $$d_1 = \dim(K_1) \leqslant d_2 = \dim(K_2) \leqslant \ldots \leqslant d_q = \dim(K_q) \leqslant \ldots \leqslant n\,.$$

B) Il existe un unique entier p tel que

$d_1 < d_2 < \ldots d_{p-1} < d_p = d_{p+1} = d_{p+2} = \ldots,$ c'est-à-dire

$K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_{p-1} \subset K_p = K_{p+1} = K_{p+2} = \ldots$

(inclusion au sens strict).

$d_p = d$ est la « dimension maximum des noyaux itérés » et l'on démontre que $d = r$, r étant l'ordre de multiplicité de la valeur propre $\lambda = 0$, c'est-à-dire l'ordre de multiplicité de la racine $\lambda = 0$ de l'équation caractéristique de g [cf. par exemple: R. Godement, *Cours d'Algèbre*, Hermann, Paris, 1965].

C) On a ainsi les inéquations $0 < p \leqslant d = r \leqslant n$.

p se nommera *l'indice* de g pour la valeur propre $\lambda = 0$; c'est le nombre minimum d'itérations à faire sur g pour que la dimension du noyau de l'itéré atteigne son maximum $d = r$.

D) *Le profil* d'un endomorphisme singulier g est formé des p nombres $\{ d_1, d_2, ..., d_{p-1}, d_p = r \}$. Cette suite, extraite de (2), est strictement *croissante*. Concrètement, on prendra dans un repère orthonormé les points $M_1, M_2, ..., M_p, M_{p+1}, ...$; le point M_q ayant pour coordonnées $x_q = q \in \mathbf{N}$, $y_q = d_q$. On y adjoindra le point M_0 (0, 0) qui correspond à $g^0 = e$, endomorphisme identique, $d_0 = 0$. La ligne brisée de sommets successifs $M_0 = 0, M_1, M_2, ..., M_p, M_{p+1} ...$ prendra également le nom de profil de l'endomorphisme singulier g. A partir du profil de g, on construira la suite de ses *sauts*

(3) $\{ \delta_1, \delta_2, ..., \delta_q, ... \}$ où $\delta_q = d_q - d_{q-1}$
(en particulier $\delta_1 = d_1 - d_0 = d_1$).

Nous allons établir que cette suite des sauts est décroissante; c'est le

THÉORÈME DE LA CONVEXITÉ. $\delta_{q+1} \leqslant \delta_q$.

Soit S_{q+1} un sous-espace supplémentaire de K_q sur K_{q+1}. Considérons l'image $g\,(S_{q+1})$ de S_{q+1} par g.

1°) Soit x un vecteur non nul de S_{q+1}. On a $g^{q+1}(x) = 0$ et $g^q(x) \neq 0$ donc $g(x) \in K_q$ et $g(x) \notin K_{q-1}$,
d'où

(4) $g(S_{q+1}) \subset K_q$; $g(S_{q+1}) \cap K_{q-1} = \{ 0 \}$.

On déduit de (4)

(5) $\dim g(S_{q+1}) \leqslant d_q - d_{q-1}$.

2°) Montrons que la restriction de g à S_{q+1} est *injective*.

Soit $\{ v_1, v_2, ..., v_\alpha \}$ où $\alpha = \delta_{q+1} = d_{q+1} - d_q$ une base de S_{q+1}. Une partie génératrice de $g(S_{q+1})$ est $\Sigma = \{ g(v_1), g(v_2), ..., g(v_\alpha) \}$. Si l'on montre que Σ est une partie libre, le résultat proposé sera établi.

Soient α scalaires $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_\alpha$ tels que

$$\rho_1 g(v_1) + \rho_2 g(v_2) + ... + \rho_\alpha g(v_\alpha) = 0 .$$

On a donc $W = \rho_1 v_1 + \rho_2 v_2 + ... + \rho_\alpha v_\alpha \in K_1$ et aussi $W \in K_1 \cap S_{q+1}$.

Mais $K_1 \cap S_{q+1} \subset K_q \cap S_{q+1} = \{ 0 \}$, d'où $W = 0$ et $\rho_1 = \rho_2 = ... = \rho_\alpha = 0$, ce qui établit que Σ est libre.

Il en résulte

(6) $\dim g(S_{q+1}) = d_{q+1} - d_q$

Rapprochons (5) et (6): $d_{q+1} - d_q \leqslant d_q - d_{q-1}$ ou $\delta_{q+1} \leqslant \delta_q$, d'où pour la suite des sauts

$$\delta_1 = d_1 \geqslant \delta_2 \geqslant \ldots \geqslant \delta_{p-1} \geqslant \delta_p > 0 = \delta_{p+1} = \delta_{p+1} = \ldots$$

3°) La ligne brisée profil de g pour $\lambda = 0$ est convexe car $\dfrac{d_q - d_{q-1}}{1} \geqslant \dfrac{d_{q+1} - d_q}{1}$ s'écrit pente $(M_{q-1}\, M_q) \geqslant$ pente (M_q, M_{q+1}).

II. Analyse d'un endomorphisme f. Théorèmes préliminaires

A) *Notations.* Soit le polynôme caractéristique de f

$$P(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1} (\lambda_2 - \lambda)^{r_2} \ldots (\lambda_s - \lambda)^{r_s} \; [r_1 + r_2 + \ldots + r_s = n] \, .$$

Le spectre de f s'écrit: $\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{r_1}, \underbrace{\lambda_2, \ldots, \lambda_2}_{r_2}, \ldots, \underbrace{\lambda_s, \ldots, \lambda_s}_{r_s}$

liste obtenue en répétant chacune des s valeurs propres distinctes à son ordre de multiplicité.

Considérons les endomorphismes singuliers $g_\nu = f - \lambda_\nu e$ $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$, e étant l'endomorphisme identique; g_ν admet la valeur propre 0, à l'ordre r_ν. Pour chaque ν, on détermine le profil de g_ν pour la valeur propre 0, soit $\{ d_1^\nu, d_2^\nu, \ldots, d_{p_\nu}^\nu \}$ où $d_q = \dim \operatorname{Ker} (g_\nu^q)$. Le noyau maximum de g_ν sera désigné par K^ν $[K^\nu = \operatorname{Ker} (g_\nu^{p_\nu})]$. On a:

$$\begin{cases} K_1^\nu \subset K_2^\nu \subset \ldots \subset K_{p_\nu}^\nu = K^\nu = K_{p_\nu+1}^\nu = \ldots \\ d_1^\nu < d_2^\nu \ldots < d_{p_\nu}^\nu = d^\nu = d_{p_\nu+1} = \ldots \end{cases}$$

Inclusions et inéquations au sens strict. On sait que $d^\nu = r_\nu$.
Par définitions;

$$\begin{cases} 1^\circ) \; \{ d_1^\nu, d_2^\nu, \ldots, d_{p_\nu}^\nu \} = \text{profil de } g_\nu \text{ pour } \lambda = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad = \text{profil de } f \text{ pour } \lambda = \lambda_\nu \\ 2^\circ) \; p_\nu = \text{indice de } f \text{ pour la valeur propre } \lambda_\nu. \end{cases}$$

B) Théorème de la disjonction. Ce théorème classique, dont la démonstration ne sera pas reproduite, s'exprime par

$$\alpha \neq \beta \Rightarrow K^\alpha \cap K^\beta = \{ 0 \}$$

(voir, par exemple, la référence antérieure).

C) *Etude de l'application* g_α^k $(k \geqslant 1)$

1°) *L'application* g_α^k *applique* K^α *dans* K^α. On a vu que $g_\alpha = g_\alpha^1$ applique K^α dans K^α, d'où, a fortiori

$$g_\alpha^k [K^\alpha] \subset K^\alpha \quad \text{(Inclusion stricte).}$$

2°) *L'application* g_α^k *restreinte à* K^β $(\beta \neq \alpha)$ *est une bijection de* K^β *sur* K^β.

a) g_α^k applique K^β dans K^β. Remarquons que $g_1 = f - \lambda_1 e$ et $g_2 = f - \lambda_2 e$ commutent, donc $g_1^k \circ g_2^{p_2} = g_2^{p_2} \circ g_1^k$ (on a pris pour simplifier $\alpha = 1$, $\beta = 2$).

$x \in K^2 \Rightarrow g_2^{p_2}(x) = 0 \Rightarrow (g_1^k \circ g_2^{p_2})(x) = 0 \Rightarrow g_2^{p_2}[g_1^k(x)] \Rightarrow g_1^k(x) \in K^2$ ou $g_1^k [K^2] \subset K^2$.

b) Mais cette application de K^β dans K^β est bijective car son noyau se réduit à 0. Soit en effet $x \in K^\beta$ tel que $g_\alpha^k(x) = 0$, on a $x \in K_k^\alpha \subset K^\alpha$, d'où $x \in K^\alpha \cap K^\beta$ et $x = 0$ d'après B).

D) *Comparaison* de K^μ et J^ν. Désignons par J^ν le sous-espace image de $g_\nu^{p_\nu}$: $J_\nu = g_\nu^{p_\nu}(E_n)$.

1°) Supposons $\nu \neq \mu$. Le théorème C 2°) où $k = p_\nu$ donne $K^\mu = g_\nu^{p_\nu}(K^\mu)$. Mais $K^\mu \subset E_n$. Donc $K^\mu \subset g_{g\nu}^{p_\nu}(E_n) = J^\nu$.

2°) Prenons $\nu = \mu$. On sait que $K_{2p_\nu}^\nu = K_{p_\nu}^\nu = K^\nu$. Si $x \in K^\nu \cap J^\nu$ on a $g_\nu^{p_\nu}(x) = 0$ et il existe $y \in E_n$ tel que $x = g_\nu^{p_\nu}(y)$.

Par suite $g_\nu^{2p_\nu}(y) = 0$ et $y \in K^\nu$ d'où $x = 0$. Donc $K^\nu \cap J^\nu = \{0\}$. Mais comme $K^\nu = \text{Ker}\,[g^{p_\nu}]$ et $J^\nu = \text{Im}\,[g_\nu^{p_\nu}]$, on a $\dim K^\nu + \dim J^\nu = n$.

Il en résulte que K^ν et J^ν sont deux sous-espaces supplémentaires de E_n. Au total:

$$\text{Si } \nu \neq \mu: \quad K^\nu \subset J^\mu \quad \text{et} \quad K^\mu \subset J^\nu,$$

$$\text{Si } \nu = \mu: \quad K^\nu \oplus J^\nu = E_n.$$

E) THÉORÈME. $K^1 \oplus K^2 \oplus \ldots \oplus K^s = E_n$.

Soient en effet $\alpha, \beta, \ldots, \rho$ et ν des entiers distincts. On a $K^\alpha + K^\beta + \ldots + K^\rho \subset J^\nu$ d'où $(K^\alpha + K^\beta + \ldots + K^\rho) \cap K^\nu = \{0\}$. La somme $K^1 + K^2 + \ldots + K^s$ est donc directe et comme sa dimension est $d_1 + d_2 + \ldots + d_s = n$ on a $K^1 \oplus K^2 \oplus \ldots \oplus K^s = E_n$.

3°) Prenant pour chaque K^ν une base $\{\beta^\nu\}$ (formée de $r_\nu = d_\nu$ vecteurs) la *juxtaposition de ces s bases* donnera une base $\{(\beta)\}$ de E_n.

III. Réduite transjordanienne de f

A) *Choix d'une première base de réduction.* g_ν applique K^ν dans K^ν. Donc $f = g_\nu + \lambda_\nu e$ applique aussi K^ν dans K^ν. La matrice M traduisant f sur la base (β) précédente sera formée de *blocs diagonaux enchaînés :*

$$\begin{bmatrix} M^1 & 0 & 0 \\ 0 & M^2 & 0 \\ & & \ddots \; 0 \\ 0 & 0 & M^s \end{bmatrix} \begin{matrix} \beta^1 \\ \beta^2 \\ \\ \beta^s \end{matrix}$$

Blocs

M^1 : matrice (r_1, r_1)
M^2 : matrice (r_2, r_2)
- - - - - - - - - - - - - - -
M^s : matrice (r_s, r_s)

Tous les éléments hors des blocs sont nuls; β^ν = base quelconque de K^ν.

B) *Construction de la réduite transjordanienne T de f.* Le processus sera expliqué sur un exemple; on considère pour chaque λ_ν, au lieu d'une base quelconque β^ν de K^ν, une « base hiérarchisée » de K^ν. Pour simplifier les notations, l'indice ν sera supprimé à l'occasion.

Supposons que pour la valeur propre (λ_ν) on ait (pour g_ν):

les noyaux itérés $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset K_4 = K^\nu$, $\quad (p=4)$,

leurs dimensions $d_1 = 4$, $d_2 = 6$, $d_3 = 8$, $d_4 = 9 = d$, $\quad (d=r=9)$,

les sauts décroissants $\delta_1 = 4$, $\delta_2 = 2$, $\delta_3 = 2$, $\delta_4 = 1$.

Le choix des vecteurs de base va s'exercer en partant de K_4 et remontant vers K_1; ces vecteurs seront numérotés dans l'ordre inverse de leur choix.

1°) Prenons l'un quelconque S_4 des supplémentaires de K_3 dans K_4, dim $S_4 = \delta_4 = 1$. Dans S_4 prenons une base formée d'un vecteur ε_9.

2°) On sait que $g(S_4) \subset K_3$ et $g(S_4) \cap K_2 = \{0\}$. Par suite, $K_2 + g(S_4) = K_2 \oplus g(S_4) \subset K_3$. Or dim $[K_2 \oplus g(S_4)] = d_2 + \delta_4 < d_2 + \delta_3 = d_3$. Cette inégalité établit que $K_2 \oplus g(S_4)$ est un sous-espace strict de K_3. On choisit l'un quelconque Ω des sous-espaces supplémentaires

de $K_2 \oplus g(S_4)$ sur K_3; $\dim \Omega = d_3 - (d_2 + \delta_4) = \delta_3 - \delta_4 = 1$. $S_3 = g(S_4) \oplus \Omega$ est un sous-espace supplémentaire de K_2 sur K_3.

$$\dim S_3 = \delta_4 + (\delta_3 - \delta_4) = \delta_3 = 2 .$$

On prendra pour base de S_3: $\{\varepsilon_8 = g(\varepsilon_9),\ \varepsilon_7 = \text{Base de } \Omega\}$.

3°) On part de S_3 et l'on forme $g(S_3)$; $\dim g(S_3) = \delta_3$ et $g(S_3) \subset K_2$, $g(S_3) \cap K_1 = \{0\}$, $g(S_3) \oplus K_1 = \delta_3 + d_1 = \delta_2 + d_1 = d_2$, car actuellement on a $\delta_3 = \delta_2$. Donc $g(S_3)$ est un sous-espace supplémentaire $g(S_3) = S_2$ de K_1 sur K_2; $\delta_3 > \delta_4$ avait nécessité l'introduction d'un sous-espace Ω pour obtenir $S_3 = \Omega \oplus g(S_4)$; ici $\delta_2 = \delta_3$ et directement $S_2 = g(S_3)$. On prendra comme base de S_2 les deux vecteurs ($\delta_2 = 2$): $\varepsilon_6 = g(\varepsilon_8)$ et $\varepsilon_5 = g(\varepsilon_7)$.

4°) $\dim g(S_2) = \dim S_2 = \delta_2 = 2$; $g(S_2)$ est un sous-espace strict de K_1, lequel a pour dimension $d_1 = \delta_1 = 4$. Prenons l'un quelconque des supplémentaires Ω' de $g(S_2)$ sur K_1 ($= S_1$), $\Omega' \oplus g(S_2) = K_1$, $\dim \Omega' = \delta_1 - \delta_2 = 2$.

Prenons comme base de $K_1 = S_1$: $\varepsilon_4, \varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1$, où $\varepsilon_4 = g(\varepsilon_6)$, $\varepsilon_3 = g(\varepsilon_5)$, ε_1 et ε_2 formant une base quelconque de Ω'. Au total sur la base $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_8, \varepsilon_9\}$ l'application g_ν de K^ν dans K^ν ($g_\nu = f - \lambda_\nu e$) se traduira par le bloc T'^ν dit bloc transjordanien. On déduira de T'^ν le nouveau bloc transjordanien T^ν traduisant sur la même base (base « canonique pour λ_ν ») l'application f de K^ν dans K^ν. Le passage de T'^ν à T^ν se fera en remplaçant par λ_ν les zéros de la diagonale principale de T'^ν.

$$\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{cccc|cc|cc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & \\
\hline
 & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & \\
 & 0 & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & & & & & & 0 & 0 & \\
 & 0 & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
 & & & & & & & & 0
\end{array}\right]
\begin{array}{c}
\varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ \varepsilon_7 \\ \varepsilon_8 \\ \varepsilon_9
\end{array}
\left[\begin{array}{cccc|cc|cc|c}
\lambda_\nu & 0 & 0 & 0 & & & & & \\
0 & \lambda_\nu & 0 & 0 & & 0 & & 0 & \\
0 & 0 & \lambda_\nu & 0 & 1 & 0 & & & \\
0 & 0 & 0 & \lambda_\nu & 0 & 1 & & 0 & \\
\hline
 & & & & \lambda_\nu & 0 & 1 & 0 & \\
 & 0 & & & 0 & \lambda_\nu & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & & & & & & \lambda_\nu & 0 & \\
 & 0 & & & & 0 & 0 & \lambda_\nu & 1 \\
\hline
 & & & & & & & & \lambda_\nu
\end{array}\right] \\
\leftarrow S_1 = K_1 \rightarrow \leftarrow S_2 \rightarrow \leftarrow S_3 \rightarrow \leftarrow S_4 \rightarrow \qquad \leftarrow \delta_1 = d_1 \rightarrow \leftarrow \delta_2 \rightarrow \leftarrow \delta_3 \rightarrow \leftarrow \delta_4 \rightarrow
\end{array}$$

Matrice T'^ν (g_ν restreinte à K^ν) Matrice T^ν (f restreinte à K^ν)

Le processus indiqué est général. On construit dans l'ordre à partir de S_{p_ν} supplémentaire arbitraire de $K^{\nu}_{p_\nu - 1}$ sur $K^{\nu}_{p_\nu}$.

Exemples des deux types extrêmes de matrices transjordaniennes

$$\left[\begin{array}{c|cccc|cc} \lambda_1 & & 0 & & & & 0 \\ \hline & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & & \\ & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & & \\ \hline 0 & & 0 & & & \lambda_3 & 0 \\ & & & & & 0 & \lambda_3 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{c|cccc|cc} \lambda_1 & & 0 & & & & 0 \\ \hline & \lambda_2 & 1 & 0 & 0 & & \\ & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & & \\ \hline 0 & & 0 & & & \lambda_3 & 1 \\ & & & & & 0 & \lambda_3 \end{array}\right]$$

T' $\qquad\qquad\qquad\qquad$ T''

T' = matrice diagonale
= réduite transjordanienne de f'
f' et f'' ont le même spectre:

T'' = matrice « one by one step»
= réduite transjordanienne de f''
$\{ \underbrace{\lambda_1}, \underbrace{\lambda_2, \lambda_2, \lambda_2, \lambda_2}, \underbrace{\lambda_3, \lambda_3} \}$.

Mais les profils sont

1°) pour $f' \{ d_1^1 = 1 = d_1 = r_1 \}$
$\{ d_1^2 = 4 = d_2 = r_2 \}$
$\{ d_1^3 = 2 = d_3 = r_3 \}$

Tous les indices = 1

2°) pour $f'' \{ d_1^1 = d_1 = r_1 \}$
$\{ d_1^2 = 1, d_2^2 = 2, d_3^2 = 3, d_4^2 = 4 = d_2 = r_2 \}$
$\{ d_1^3 = 1, d_2^3 = 2 = d_3 = r_3 \}$

Tous les sauts = 1

Remarque. Si chaque valeur propre est racine simple de l'équation caractéristique

$$s = n \quad \text{ou} \quad r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 1 ,$$

la transjordanienne est à la fois « diagonale » et « one by one step ».

IV. Condition nécessaire et suffisante de similitude de deux matrices

A) *Spécifique d'un endomorphisme f de E_n.* On choisit, une fois pour toutes, une relation d'ordre ω sur $\mathbf{C}$. Le spécifique de f est formé

1°) *du spectre ordonné de f* : $\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{r_1}, \underbrace{\lambda_2, \ldots, \lambda_2}_{r_2}, \ldots, \underbrace{\lambda_s, \ldots, \lambda_s}_{r_s},$

$$(\lambda_1 \,\omega\, \lambda_2 \,\omega \ldots \lambda_{s-1} \,\omega\, \lambda_s)\,.$$

2°) *des s profils* relatifs à chaque valeur propre:

$$\{ d_1^v, d_2^v, \ldots, d_{pv-1}^v, d_{pv}^v = d_v = r_v \} \quad (v = 1, 2, \ldots, s)\,.$$

B) *Spécifique d'une matrice A (n, n).* Soient deux bases $(\mathscr{J})$ et $(\mathscr{J}')$ de E_n. Considérons les endomorphismes f se traduisant par A sur $(\mathscr{J})$, f' se traduisant par A sur $(\mathscr{J}')$.

On démontre facilement que le spécifique de f coincide avec celui de f' (même spectre ordonné et mêmes profils). Ce qui justifie la définition:

Le spécifique d'une matrice A (n, n) est le spécifique commun à tous les endomorphismes se traduisant par A, sur toutes bases possibles de E_n.

C) *Première bijection.* Il y a bijection entre

$$\{ \text{matrices transjordaniennes } T \} \text{ et } \{ \text{spécifiques } (S) \}$$

$T \leftrightarrow S$ (S étant le spécifique qu'enregistre T).

D) *Seconde bijection.*

a) Soit un représentant A d'une classe d'équivalence (C_A) dans l'ensemble des matrices (n, n). Considérons une base quelconque $(\mathscr{J})$ et soit f l'endomorphisme traduit par A sur $(\mathscr{J})$; prenons la réduite transjordanienne T de f: *le même f* est traduit

   α) par A sur $(\mathscr{J})$.

   β) par T sur (S) (base canonique de f).

b) Dans une même classe (C_A), il ne peut y avoir deux représentants transjordaniens distincts. Supposons deux transjordaniennes équivalentes; elles traduisent le même endomorphisme f sur deux bases d'où

$$\text{spécifique de } f = \text{spécifique de } T = \text{spécifique de } T'.$$

Les transjordaniennes T et T' ayant le même spécifique (qu'elles enregistrent) sont confondues.

c) Toute transjordanienne T appartient à la classe (C_T). Au total: *il y a bijection entre* { matrices transjordaniennes T} *et* { Classes d'équivalence (C_A) }
Réunissant les deux bijections, il y a bijection entre

{ classes d'équivalence (C_A) } et { spécifiques (S) }.

D'où le théorème qui justifie l'introduction des transjordaniennes et des spécifiques:

D) THÉORÈME. *Pour que deux matrices A et B soient équivalentes il faut et il suffit que leurs spécifiques soient confondus.*

E) *Remarque importante.* Les théorèmes précédents d'unicité et de bijection *disparaissent* si, au lieu de réduites transjordaniennes, on prend des réduites *jordaniennes* J.

Cela provient du fait qu'un endomorphisme possède plusieurs réduites de *Jordan.* Dans chaque classe (C_A) il y a *plusieurs* représentants *jordaniens* (mais un seul transjordanien).

V. APPLICATIONS

L'utilisation des transjordaniennes, de leurs profils (avec les sauts δ_q^v et les indices p_v) permet de résoudre facilement certaines questions. On peut ainsi obtenir certains résultats donnés ici sans démonstration.

A) *Polynômes minimums.* Soit un polynôme $Q \in \mathbf{C}[X]$ et A une matrice (n, n) donnée:

$$Q(\lambda) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \lambda^j, \quad Q(A) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j A^j, \quad \alpha_j \in \mathbf{C}.$$

Soit $\mathscr{L} = \{ Q \in \mathbf{C}[X];\ Q(A) = 0 \}$. On sait que $\mathscr{L}$ est un idéal de $\mathbf{C}[X]$; cet idéal est principal; soit π son générateur:

$$Q \in \mathscr{L} \Leftrightarrow Q(A) = 0 \Leftrightarrow Q \text{ multiple de } \pi.$$

Or le polynôme caractéristique P de A appartient à $\mathscr{L}$ (Cayley Hamilton),

$$P(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1} (\lambda_2 - \lambda)^{r_2} \dots (\lambda_s - \lambda)^{r_s}.$$

Donc, π étant un diviseur de P,

$$\pi(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{\alpha_1} (\lambda_2 - \lambda)^{\alpha_2} \dots (\lambda_s - \lambda)^{\alpha_s}$$

où $\alpha_1 \leqslant r_1, \alpha_2 \leqslant r_2, \dots, \alpha_s \leqslant r_s$. On démontre que $\alpha_\nu = p_\nu$ $(\nu = 1, 2, \dots, s)$, c'est-à-dire:

THÉORÈME DE L'INDICE. Le polynôme minimum de A (défini à une constante multiplicative près) est

$$\pi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p_1} (\lambda - \lambda_2)^{p_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{p_s}.$$

Cas particuliers.

1°) Si A est diagonalisable: $\pi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_s)$.

2°) Si A est « one by one step »: $\pi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{r_s} = P(\lambda)$.

B) *Matrices commutant avec une matrice donnée A.* Soit $E' = \{ X \in E;\ AX = XA \}$ où E est l'espace vectoriel des matrices n, n sur le corps $\mathbf{C}$ $(A \in E')$. E' est un sous-espace vectoriel de E. Sa dimension dépend bien entendu du spécifique de A. On peut démontrer qu'elle est égale à la *somme des carrés de tous les sauts.*

$$\dim(E') = \sum_{\nu=1}^{s} \left[\sum_{q=1}^{p_\nu} (\delta_q^\nu)^2 \right]$$

Cas particuliers:

1°) A diagonalisable: $\dim(E') = r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_s^2$.

2°) A « one by one step »: $\dim(E') = r_1 + r_2 + \dots + r_s = n$.

C) *Série entière en A.* Il est facile de former la puissance $q$ième d'une transjordanienne, d'où la puissance $q$ième d'une matrice A. Soit la série entière

$$f(z) = \sum_{q=1}^{\infty} a_q z^q$$

de rayon de convergence R. On considère la série de matrice A

$$\sum_{q=1}^{\infty} a_q A^q.$$

Elle est convergente de somme la matrice $f(A)$ à condition que $|\lambda_\nu| < R$ $(\nu = 1, 2, \dots, s)$. Passant par l'intermédiaire de la réduite transjordanienne T de A, on construit effectivement

$$f(T) = \sum_{q=1}^{\infty} a_q T^q$$

au moyen des valeurs de $f(z)$ et de ses dérivées pour $z = \lambda_1, \ldots, z = \lambda_s$. On a alors $f(A) = P \circ f(T) \circ P^{-1}$, P étant la matrice de passage ($A = P T P^{-1}$). On peut obtenir un théorème généralisant celui des polynômes minimums

$$f(A) = 0 \Leftrightarrow f(z) \text{ admette } \lambda_\nu \text{ comme racine d'ordre } \geqslant p_\nu$$
$$\nu = 1, 2, \ldots, s\,.$$

D) *Limite lorsque* $q \to \infty$ *de la direction* (Δ_q) *transformée par* f^q *de la direction donnée* (Δ_0). Soit $x \neq 0$, fixe, un vecteur directeur de (Δ_0); le vecteur $f^q(x)$ ou tout vecteur W_q colinéaire à ce dernier, est directeur de (Δ_q). Si $\lim_{q\to\infty} W_q = L$, la direction limite de (Δ_q) sera celle de vecteur directeur L.

On décompose $x = x^1 + x^2 + \ldots + x^s$; $x^\nu \in K^\nu = K^\nu_{p_\nu}$ et obtient

$$(1) \quad f^q(x^\nu) = \lambda_\nu^q x^\nu + C_q^1 \lambda_\nu^{q-1} g_\nu(x^\nu) + \ldots + C_q^{p_\nu - 1} \lambda_\nu^{q-p_\nu+1} g_\nu^{p_\nu-1}(x^\nu)\,.$$

On classe les valeurs propres par module décroissant:

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_s|\,.$$

Si $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ et $x^1 \neq 0$, on obtient le résultat connu: il y a une limite de (Δ_q) de vecteur directeur $L \in K_1^1$ que l'on détermine.
Si $|\lambda_1| = |\lambda_2|$, l'étude se poursuit au moyen de (1) ...

E) *Résolution du système différentiel linéaire.*

$$(\Sigma) \quad \frac{dX}{dt} = A X$$

$X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$ = unicolonne de n fonctions inconnues de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$, $A(n, n)$ connue. On transmue (Σ) en (S) par la matrice de passage P telle que $T = P^{-1} A P$, T réduite transjordanienne de A, en faisant le changement d'inconnue $X = P Y$:

$$(S) \quad \frac{dY}{dt} = T Y.$$

Ce système (S) se décompose en

$$\frac{dY^1}{dt} = T^1\, Y^1\,, \quad \frac{dY^2}{dt} = T^2\, Y^2\,, \quad \ldots\,, \quad \frac{dY^s}{dt} = T^s\, Y^s\,,$$

T^ν étant le bloc transjordanien afférent à λ_ν.

Le système $\dfrac{dY^\nu}{dt} = T^\nu\, Y^\nu$ sera très simple, la dérivée d'une composante y_k étant simplement $\dfrac{dy_k}{dt} = \lambda_\nu\, y_k + \alpha\, y_{k+l}\,,\ \alpha = 0$ ou $1\,,\ 0 < l \leqslant r_\nu - k$ l'intégration de (S) est alors immédiate; on en déduit celle de (Σ).

1°) *Système* (Σ) *à solutions exponentielles pures ou à solutions algébrico-exponentielles* (x_k = somme de produits d'exponentielles par des constantes ou somme de produits d'exponentielles par des monômes dont l'un au moins a un degré $\geqslant 1$).

(Σ) à solutions exponentielles pures $\Leftrightarrow$ A diagonalisable

2°) *Systèmes* (Σ) *monoréductible*. C'est un système où la résolution se ramène à la résolution d'une équation différentielle d'ordre n par rapport à une composante, les autres composantes s'obtenant par dérivations de celle-là. On montre que

(Σ) monoréductible $\Leftrightarrow$ A « one by one step ».

(Reçu le 5 septembre 1976)

A. Fontaine
129, rue de l'Abbé-Groult
F-75015 — Paris