IV. Condition nécessaire et suffisante de similitude DE DEUX MATRICES

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1977)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

IV. Condition nécessaire et suffisante de similitude de deux matrices

A) *Spécifique d'un endomorphisme f de E_n.* On choisit, une fois pour toutes, une relation d'ordre ω sur $\mathbf{C}$. Le spécifique de f est formé

1°) *du spectre ordonné de f* : $\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{r_1}, \underbrace{\lambda_2, \ldots, \lambda_2}_{r_2}, \ldots, \underbrace{\lambda_s, \ldots, \lambda_s}_{r_s},$

$$(\lambda_1 \,\omega\, \lambda_2 \,\omega \ldots \lambda_{s-1} \,\omega\, \lambda_s)\,.$$

2°) *des s profils* relatifs à chaque valeur propre:

$$\{ d_1^v, d_2^v, \ldots, d_{pv-1}^v, d_{pv}^v = d_v = r_v \} \quad (v = 1, 2, \ldots, s)\,.$$

B) *Spécifique d'une matrice A (n, n).* Soient deux bases $(\mathscr{J})$ et $(\mathscr{J}')$ de E_n. Considérons les endomorphismes f se traduisant par A sur $(\mathscr{J})$, f' se traduisant par A sur $(\mathscr{J}')$.

On démontre facilement que le spécifique de f coincide avec celui de f' (même spectre ordonné et mêmes profils). Ce qui justifie la définition:

Le spécifique d'une matrice A (n, n) est le spécifique commun à tous les endomorphismes se traduisant par A, sur toutes bases possibles de E_n.

C) *Première bijection.* Il y a bijection entre

$$\{ \text{matrices transjordaniennes } T \} \text{ et } \{ \text{spécifiques } (S) \}$$

$T \leftrightarrow S$ (S étant le spécifique qu'enregistre T).

D) *Seconde bijection.*

a) Soit un représentant A d'une classe d'équivalence (C_A) dans l'ensemble des matrices (n, n). Considérons une base quelconque $(\mathscr{J})$ et soit f l'endomorphisme traduit par A sur $(\mathscr{J})$; prenons la réduite transjordanienne T de f: *le même f* est traduit

   α) par A sur $(\mathscr{J})$.

   β) par T sur (S) (base canonique de f).

b) Dans une même classe (C_A), il ne peut y avoir deux représentants transjordaniens distincts. Supposons deux transjordaniennes équivalentes; elles traduisent le même endomorphisme f sur deux bases d'où

$$\text{spécifique de } f = \text{spécifique de } T = \text{spécifique de } T'.$$

Les transjordaniennes T et T' ayant le même spécifique (qu'elles enregistrent) sont confondues.

c) Toute transjordanienne T appartient à la classe (C_T). Au total: *il y a bijection entre* { matrices transjordaniennes T} *et* { Classes d'équivalence (C_A) }
Réunissant les deux bijections, il y a bijection entre

{ classes d'équivalence (C_A) } et { spécifiques (S) }.

D'où le théorème qui justifie l'introduction des transjordaniennes et des spécifiques:

D) THÉORÈME. *Pour que deux matrices A et B soient équivalentes il faut et il suffit que leurs spécifiques soient confondus.*

E) *Remarque importante.* Les théorèmes précédents d'unicité et de bijection *disparaissent* si, au lieu de réduites transjordaniennes, on prend des réduites *jordaniennes* J.

Cela provient du fait qu'un endomorphisme possède plusieurs réduites de *Jordan.* Dans chaque classe (C_A) il y a *plusieurs* représentants *jordaniens* (mais un seul transjordanien).

V. APPLICATIONS

L'utilisation des transjordaniennes, de leurs profils (avec les sauts δ_q^v et les indices p_v) permet de résoudre facilement certaines questions. On peut ainsi obtenir certains résultats donnés ici sans démonstration.

A) *Polynômes minimums.* Soit un polynôme $Q \in \mathbf{C}[X]$ et A une matrice (n, n) donnée:

$$Q(\lambda) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \lambda^j, \quad Q(A) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j A^j, \quad \alpha_j \in \mathbf{C}.$$

Soit $\mathscr{L} = \{ Q \in \mathbf{C}[X];\ Q(A) = 0 \}$. On sait que $\mathscr{L}$ est un idéal de $\mathbf{C}[X]$; cet idéal est principal; soit π son générateur:

$$Q \in \mathscr{L} \Leftrightarrow Q(A) = 0 \Leftrightarrow Q \text{ multiple de } \pi.$$

Or le polynôme caractéristique P de A appartient à $\mathscr{L}$ (Cayley Hamilton),

$$P(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1} (\lambda_2 - \lambda)^{r_2} \dots (\lambda_s - \lambda)^{r_s}.$$