V. Applications

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1977)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Les transjordaniennes T et T' ayant le même spécifique (qu'elles enregistrent) sont confondues.

c) Toute transjordanienne T appartient à la classe (C_T). Au total: *il y a bijection entre* { matrices transjordaniennes T} *et* { Classes d'équivalence (C_A) }
Réunissant les deux bijections, il y a bijection entre

{ classes d'équivalence (C_A) } et { spécifiques (S) }.

D'où le théorème qui justifie l'introduction des transjordaniennes et des spécifiques:

D) THÉORÈME. *Pour que deux matrices A et B soient équivalentes il faut et il suffit que leurs spécifiques soient confondus.*

E) *Remarque importante.* Les théorèmes précédents d'unicité et de bijection *disparaissent* si, au lieu de réduites transjordaniennes, on prend des réduites *jordaniennes* J.

Cela provient du fait qu'un endomorphisme possède plusieurs réduites de *Jordan.* Dans chaque classe (C_A) il y a *plusieurs* représentants *jordaniens* (mais un seul transjordanien).

V. APPLICATIONS

L'utilisation des transjordaniennes, de leurs profils (avec les sauts δ_q^v et les indices p_v) permet de résoudre facilement certaines questions. On peut ainsi obtenir certains résultats donnés ici sans démonstration.

A) *Polynômes minimums.* Soit un polynôme $Q \in \mathbf{C}[X]$ et A une matrice (n, n) donnée:

$$Q(\lambda) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \lambda^j, \quad Q(A) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j A^j, \quad \alpha_j \in \mathbf{C}.$$

Soit $\mathscr{L} = \{ Q \in \mathbf{C}[X];\ Q(A) = 0 \}$. On sait que $\mathscr{L}$ est un idéal de $\mathbf{C}[X]$; cet idéal est principal; soit π son générateur:

$$Q \in \mathscr{L} \Leftrightarrow Q(A) = 0 \Leftrightarrow Q \text{ multiple de } \pi.$$

Or le polynôme caractéristique P de A appartient à $\mathscr{L}$ (Cayley Hamilton),

$$P(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1} (\lambda_2 - \lambda)^{r_2} \dots (\lambda_s - \lambda)^{r_s}.$$

Donc, π étant un diviseur de P,

$$\pi(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{\alpha_1} (\lambda_2 - \lambda)^{\alpha_2} \dots (\lambda_s - \lambda)^{\alpha_s}$$

où $\alpha_1 \leqslant r_1, \alpha_2 \leqslant r_2, \dots, \alpha_s \leqslant r_s$. On démontre que $\alpha_\nu = p_\nu$ $(\nu = 1, 2, \dots, s)$, c'est-à-dire:

THÉORÈME DE L'INDICE. Le polynôme minimum de A (défini à une constante multiplicative près) est

$$\pi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p_1} (\lambda - \lambda_2)^{p_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{p_s}.$$

Cas particuliers.

1°) Si A est diagonalisable: $\pi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_s)$.

2°) Si A est « one by one step »: $\pi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{r_s} = P(\lambda)$.

B) *Matrices commutant avec une matrice donnée A.* Soit $E' = \{ X \in E;\ AX = XA \}$ où E est l'espace vectoriel des matrices n, n sur le corps $\mathbf{C}$ $(A \in E')$. E' est un sous-espace vectoriel de E. Sa dimension dépend bien entendu du spécifique de A. On peut démontrer qu'elle est égale à la *somme des carrés de tous les sauts.*

$$\dim(E') = \sum_{\nu=1}^{s} \left[\sum_{q=1}^{p_\nu} (\delta_q^\nu)^2 \right]$$

Cas particuliers:

1°) A diagonalisable: $\dim(E') = r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_s^2$.

2°) A « one by one step »: $\dim(E') = r_1 + r_2 + \dots + r_s = n$.

C) *Série entière en A.* Il est facile de former la puissance $q$ième d'une transjordanienne, d'où la puissance $q$ième d'une matrice A. Soit la série entière

$$f(z) = \sum_{q=1}^{\infty} a_q z^q$$

de rayon de convergence R. On considère la série de matrice A

$$\sum_{q=1}^{\infty} a_q A^q.$$

Elle est convergente de somme la matrice $f(A)$ à condition que $|\lambda_\nu| < R$ $(\nu = 1, 2, \dots, s)$. Passant par l'intermédiaire de la réduite transjordanienne T de A, on construit effectivement

$$f(T) = \sum_{q=1}^{\infty} a_q T^q$$

au moyen des valeurs de $f(z)$ et de ses dérivées pour $z = \lambda_1, \ldots, z = \lambda_s$. On a alors $f(A) = P \circ f(T) \circ P^{-1}$, P étant la matrice de passage ($A = P T P^{-1}$). On peut obtenir un théorème généralisant celui des polynômes minimums

$$f(A) = 0 \Leftrightarrow f(z) \text{ admette } \lambda_\nu \text{ comme racine d'ordre } \geqslant p_\nu$$
$$\nu = 1, 2, \ldots, s\,.$$

D) *Limite lorsque* $q \to \infty$ *de la direction* (Δ_q) *transformée par* f^q *de la direction donnée* (Δ_0). Soit $x \neq 0$, fixe, un vecteur directeur de (Δ_0); le vecteur $f^q(x)$ ou tout vecteur W_q colinéaire à ce dernier, est directeur de (Δ_q). Si $\lim_{q\to\infty} W_q = L$, la direction limite de (Δ_q) sera celle de vecteur directeur L.

On décompose $x = x^1 + x^2 + \ldots + x^s$; $x^\nu \in K^\nu = K^\nu_{p_\nu}$ et obtient

$$(1) \quad f^q(x^\nu) = \lambda_\nu^q x^\nu + C_q^1 \lambda_\nu^{q-1} g_\nu(x^\nu) + \ldots + C_q^{p_\nu - 1} \lambda_\nu^{q-p_\nu+1} g_\nu^{p_\nu-1}(x^\nu)\,.$$

On classe les valeurs propres par module décroissant:

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_s|\,.$$

Si $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ et $x^1 \neq 0$, on obtient le résultat connu: il y a une limite de (Δ_q) de vecteur directeur $L \in K_1^1$ que l'on détermine.
Si $|\lambda_1| = |\lambda_2|$, l'étude se poursuit au moyen de (1) ...

E) *Résolution du système différentiel linéaire.*

$$(\Sigma) \quad \frac{dX}{dt} = A X$$

$X = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$ = unicolonne de n fonctions inconnues de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$, $A(n, n)$ connue. On transmue (Σ) en (S) par la matrice de passage P telle que $T = P^{-1} A P$, T réduite transjordanienne de A, en faisant le changement d'inconnue $X = P Y$:

$$(S) \quad \frac{dY}{dt} = T Y.$$

Ce système (S) se décompose en

$$\frac{dY^1}{dt} = T^1\, Y^1\,, \quad \frac{dY^2}{dt} = T^2\, Y^2\,, \quad \ldots\,, \quad \frac{dY^s}{dt} = T^s\, Y^s\,,$$

T^ν étant le bloc transjordanien afférent à λ_ν.

Le système $\dfrac{dY^\nu}{dt} = T^\nu\, Y^\nu$ sera très simple, la dérivée d'une composante y_k étant simplement $\dfrac{dy_k}{dt} = \lambda_\nu\, y_k + \alpha\, y_{k+l}\,,\ \alpha = 0$ ou $1\,,\ 0 < l \leqslant r_\nu - k$ l'intégration de (S) est alors immédiate; on en déduit celle de (Σ).

1°) *Système* (Σ) *à solutions exponentielles pures ou à solutions algébrico-exponentielles* (x_k = somme de produits d'exponentielles par des constantes ou somme de produits d'exponentielles par des monômes dont l'un au moins a un degré $\geqslant 1$).

(Σ) à solutions exponentielles pures $\Leftrightarrow$ A diagonalisable

2°) *Systèmes* (Σ) *monoréductible*. C'est un système où la résolution se ramène à la résolution d'une équation différentielle d'ordre n par rapport à une composante, les autres composantes s'obtenant par dérivations de celle-là. On montre que

(Σ) monoréductible $\Leftrightarrow$ A « one by one step ».

(Reçu le 5 septembre 1976)

A. Fontaine
129, rue de l'Abbé-Groult
F-75015 — Paris