ciascun q_i una opportuna combinazione lineare di polinomi che lo precedono si può passare ad un sistema

$$0, \ldots, \bar{q}_{j_1}, x\bar{q}_{j_1}, \ldots, \bar{q}_{j_n}, x\bar{q}_{j_n}, \ldots$$

che genera J e in cui la sequenza $\bar{q}_{j_1}, \ldots, \bar{q}_{j_n}$ è ridotta. Quindi $\bar{q}_{j_1}, \ldots, \bar{q}_{j_n}$ è il sistema normale cercato.

Corollario 1. Esiste un procedimento effettivo che dati due ideali di $Z[x]$ mediante un loro qualunque sistema di generatori permette di confrontarli rispetto all'inclusione.

Dim. Siano $I = (p_1, \ldots, p_n)$, $J = (q_1, \ldots, q_r)$ gli ideali dati. Consideriamo l'ideale $K = (p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_r)$. Dall'esame dei sistemi normali di generatori per I, J, K si arriva al confronto cercato.

Corollario 2. Esiste un procedimento effettivo che, dati due ideali di $Z[x]$ mediante un loro qualunque sistema di generatori, permette di trovare un sistema normale di generatori per l'ideale prodotto.

Corollario 3. Esiste un procedimento effettivo che, dato un ideale di $Z[x]$ mediante un qualunque sistema di generatori mi permette di riconoscere se è primo, massimale.

Dim. Immediato dal teorema e dalla caratterizzazione [1]) degli ideali primi e massimali di $Z[x]$.

L'argomento del presente lavoro si presta a diverse generalizzazione di cui di occuperemo in seguito; alcune di esse sono ovvie e avremmo potuto darle subito, ma abbiamo preferito per chiarezza fare l'esposizione nel caso di $Z[x]$.

Nota

Quando il presente lavoro era già stato inviato per la pubblicazione ci è giunta notizia che F. Châtelet in [1] e G. Fardoux in [2] [3] hanno studiato rispettivamente sistemi di generatori per ideali di $\mathbf{Z}[x]$ e $A[x]$ (con A anello a ideali pricipali).

Le basi canoniche individuate dagli autori sopra citati hanno stretti legami con i nostri sistemi normali di generatori, pur non coincidendo. Più

[1]) Ci riferiamo alla caratterizzazione data a pag. 233 di I. R. Shafarevich: « Basic algebraic geometry », Berlin 1974.

precisamente è facile vedere che se $\mathscr{B} = \{f_0, f_1, ..., f_n\}$ è una base canonica secondo Fardoux-Châtelet (ordinata secondo l'ordine crescente dei gradi) allora $\mathscr{B}$ è una sequenza normale (cfr. def. 4 sopra) che genera l'ideale. D'altra parte una sequenza normale si può trasformare in una sequenza normale ridotta (cfr. def. 5 sopra) $\mathscr{B}' = \{f'_0, f'_1, ..., f'_n\}$ sottraendo da ogni polinomio una opportuna combinazione lineare di polinomi che lo precedono. $\mathscr{B}'$ così ottenuta genera lo stesso ideale di $\mathscr{B}$; inoltre $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$ sono equivalenti nel senso di Fardoux. Possiamo dunque concludere che per ogni base canonica esiste una base canonica equivalente che è il sistema normale di generatori.

BIBLIOGRAFIA

[1] CHÂTELET, F. *Colloque de Théorie des nombres d'Oberwohlfach*, 1964.

[2] FARDOUX, G. Bases réduites d'idéaux de $A[x]$, A, anneaux principal. *C. R. Acad. Sci. Paris*, *262* (1966), pp. 1146-1148.

[3] —— *Les idéaux des anneaux de polynômes à coefficients entiers et leurs applications.* (Tesi di dottorato, 1970.)

(Reçu le 25 janvier 1977)

Raffaella Franci
Laura Toti Rigatelli

Istituto di Matematica della Facoltà di Scienze F.M.N.
Via del Capitano 15
I - 53100 — Siena