LA (2p+1)-ÈME DÉVIATION D'UN ANNEAU LOCAL

Autor(en): **André, Michel**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1977)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **05.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-48929

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

LA (2p+1)-ÈME DÉVIATION D'UN ANNEAU LOCAL [1]

par Michel ANDRÉ

Par un argument de résolution minimale ou par un argument d'algèbre de Hopf à puissances divisées, on sait que la série de Poincaré d'un anneau local noethérien A a la forme suivante

$$P_A(x) = \Sigma\beta_j x^j = (1+x)^{\varepsilon_1}(1-x^2)^{-\varepsilon_2}\dots.$$

Les nombres de Betti β_j sont les dimensions des espaces vectoriels $\mathrm{Tor}_j^A(K, K)$ sur le corps résiduel K, et les nombres positifs ou nuls ε_i sont appelés les déviations de l'anneau local. Par ailleurs la théorie du complexe cotangent, avec l'homologie qui en découle, fournit d'autres nombres positifs ou nuls δ_i qui sont appelés les invariants de l'anneau local et qui sont égaux aux dimensions des espaces vectoriels $H_i(A, K, K)$.

Grâce à un théorème de convergence de D. Quillen, on peut appliquer la théorie du produit symétrique et constater que l'on a l'égalité $\delta_i = \varepsilon_i$ sans restriction en caractéristique nulle et avec la restriction $i \leqslant 2p$ en caractéristique positive. Un rappel de la démonstration sera donné ci-dessous. Le premier degré intéressant en caractéristique p est donc égal à $2p+1$. On a alors toujours une inégalité $\delta_{2p+1} \leqslant \varepsilon_{2p+1}$. Il y a même égalité si l'idéal maximal M est petit dans l'un des deux sens suivants: ou bien l'idéal M^p est nul ou bien l'idéal M a $2p-1$ générateurs. Il se pose le problème de l'égalité en toute généralité.

Une analyse de la situation fait revenir à la théorie de l'homologie des produits symétriques et des espaces d'Eilenberg-Mac Lane. Dans la terminologie de Cartan, c'est le mot $\sigma\gamma\sigma\sigma$ qui concerne tout spécialement le degré $2p+1$. En topologie, il lui correspond l'opération cohomologique

$$P : H^3 \to H^{2p+1}$$

fortement liée aux puissances p-èmes des éléments de degré 2 et aux isomorphismes de suspension. De manière analogue, une application canonique va apparaître

$$\pi : T_3(A, K, K) \to T_{2p+1}(A, K, K)$$

---

[1]) Présenté au Colloque de Topologie et d'Algèbre, Zurich, avril 1977.

où $T_i(A, K, K)$ est l'espace vectoriel des éléments indécomposables de $\mathrm{Tor}_i^A(K, K)$. Mais alors l'égalité $\delta_{2p+1} = \varepsilon_{2p+1}$ a lieu si et seulement si π est l'application nulle. Un exemple va montrer que cette propriété n'est pas toujours satisfaite.

L'espace vectoriel $T_3(A, K, K)$, qui concerne la notion d'intersection complète, est un quotient du deuxième module d'homologie à la Koszul. Il est donc possible de remplacer la paire quelconque (A, α), où α appartient à $T_3(A, K, K)$, par une paire générique $(\tilde{A}, \tilde{\alpha})$. La situation se simplifie maintenant: ou bien l'élément $\tilde{\pi}(\tilde{\alpha})$ est nul et alors π est toujours nul et δ_{2p+1} est toujours égal à ε_{2p+1}, ou bien l'élément $\tilde{\pi}(\tilde{\alpha})$ n'est pas nul et alors $\tilde{A}$ fournit l'exemple recherché d'un anneau avec δ_{2p+1} strictement inférieur à ε_{2p+1}. Le calcul montre que l'élément $\tilde{\pi}(\tilde{\alpha})$ n'est pas nul. Il faut donc se contenter de la propriété suivante:

$$\delta_{2p+1} \leqslant \varepsilon_{2p+1} \leqslant \delta_{2p+1} + \varepsilon_3 .$$

Le cas où ε_3 est nul n'apporte rien de nouveau. En effet l'anneau A est alors une intersection complète, ce qui oblige la déviation ε_{2p+1} et l'invariant δ_{2p+1} à être nuls.

Introduction

Il est possible de résoudre projectivement le A-module K par une A-algèbre simpliciale P qui est libre en chaque degré, comme A-algèbre. Le produit tensoriel $P \otimes_A K$ est alors une K-algèbre simpliciale R qui est libre en chaque degré, comme K-algèbre. L'espace vectoriel $H_n[R]$ est évidemment toujours égal à l'espace vectoriel $\mathrm{Tor}_n^A(K, K)$. De plus la K-algèbre simpliciale R est munie d'une augmentation $\rho: R \to K$. Son noyau I est un idéal simplicial de l'anneau simplicial R. Il est utile d'en considérer les puissances successives I^k, calculées degré par degré. En particulier le quotient I/I^2 est un K-module simplicial, dont le complexe correspondant est par définition le complexe cotangent de la A-algèbre K. L'espace vectoriel $H_n[I/I^2]$, qui est l'espace vectoriel $H_n(A, K, K)$ de la théorie de l'homologie des algèbres commutatives, a une dimension finie δ_n, l'anneau local A étant supposé noethérien.

Dénotons par S^r le foncteur « r-ème produit symétrique » de la catégorie des K-modules et par S leur somme directe, qui est le foncteur « algèbre

symétrique». Degré par degré, on prolonge ces foncteurs à la catégorie des K-modules simpliciaux. Si M est un K-module simplicial, alors l'homologie $H[SM]$ a une structure naturelle d'algèbre de Hopf à puissances divisées et par conséquent sa série de Poincaré a la forme suivante

$$\Sigma\, b_j\, x^j = (1+x)^{e_1}(1-x^2)^{-e_2} \dots .$$

Les nombres de Betti b_j sont les dimensions des espaces vectoriels $H_j[SM]$ et les nombres positifs ou nuls e_i peuvent être calculés explicitement, soit par voie topologique selon la méthode de Dold-Thom, soit par voie algébrique selon la méthode de M.-A. Nicollerat. Les nombres e_i se calculent à l'aide des nombres m_i qui sont les dimensions des espaces vectoriels $H_i[M]$. Le résultat partiel suivant est suffisant ici: d'une part e_i est égal à m_i pour $i \leqslant 2p$ et d'autre part e_{2p+1} est égal à la somme $m_{2p+1} + m_3$.

Comme la K-algèbre augmentée R est libre en chaque degré, il existe pour tout r un isomorphisme de K-modules simpliciaux de $S^r(I/I^2)$ sur I^r/I^{r+1}. Par conséquent l'homologie du K-module simplicial I/I^2 (formée des espaces vectoriels $H_i(A, K, K)$ connus par leurs dimensions δ_i) détermine complètement l'homologie des K-modules simpliciaux I^r/I^{r+1}. Par ailleurs l'homologie du K-module simplicial $I^0 = R$ (formée des espaces vectoriels $\mathrm{Tor}_j^A(K, K)$ connus par leurs dimensions β_j données par les déviations ε_i) peut être filtrée par les images de l'homologie des K-modules simpliciaux I^r. Il reste donc à faire le passage de l'homologie du K-module simplicial I^r/I^{r+1} à l'homologie du K-module simplicial I^r. La situation se présente de manière correcte (on a en fait une suite spectrale du premier quadrant) grâce au théorème de convergence de D. Quillen. On a $H_m[I^n]$ nul pour toute paire $m < n$, comme le démontre un argument de nature purement simpliciale.

Les 2p premières déviations

Grâce au théorème d'Eilenberg-Zilber et grâce au foncteur F^r, noyau de la transformation naturelle du foncteur $\otimes^r$ sur le foncteur S^r, on peut démontrer le résultat utile suivant. Si un épimorphisme λ entre des K-modules simpliciaux connexes donne des épimorphismes $H_k[\lambda]$ pour $k = 0,\dots,n$, alors il donne des épimorphismes $H_k[S^r\lambda]$ pour $k = 0,\dots, n+1$ et pour r quelconque, sauf peut-être pour $k = n+1$ et $r = 1$, bien entendu. On peut appliquer ce résultat à l'homomorphisme canonique de I sur I/I^2.

On va utiliser l'homomorphisme canonique de $H_n[I]$ dans $H_n[I/I^2]$, autrement dit de $\mathrm{Tor}_n^A(K,K)$ dans $H_n(A,K,K)$, pour n différent de 0. Les produits non-triviaux de $H[I]$ proviennent de l'image de l'homomorphisme de $H[I] \otimes H[I]$ dans $H[I]$, qui passe au travers de $H[I^2]$ et les puissances divisées de $H[I]$ proviennent de l'image de l'application partiellement définie de $H[I]$ dans $H[I]$, qui passe au travers de $H[I^p]$ donc de $H[I^2]$. Cela étant remarqué, on peut donc définir un homomorphisme canonique et utile

$$\eta_n : T_n(A, K, K) \to H_n(A, K, K)$$

avec l'isomorphisme de définition

$$T_n(A, K, K) \cong \mathrm{Tor}_n^A(K, K) / J_n$$

où J_n est le sous-espace vectoriel engendré par tous les produits non-triviaux de degré n et par toutes les puissances divisées de degré n. Comme ici le degré n est au plus égal à $2p+1$, les puissances divisées interviennent dans le seul degré $2p$. Par la théorie des algèbres de Hopf à puissances divisées, il est clair que l'espace vectoriel $T_n(A, K, K)$ a la dimension ε_n. Par suite on a une inégalité $\delta_n \leqslant \varepsilon_n$ si η_n est un épimorphisme et une égalité $\delta_n = \varepsilon_n$ si η_n est un isomorphisme. Appelons Ω_n le conoyau de l'homomorphisme η_n et ω_n la dimension de Ω_n.

Considérons la condition C_n suivante: d'une part η_k est un isomorphisme pour $k \leqslant n-1$ et d'autre part η_n est un épimorphisme. On a donc des homomorphismes surjectifs de $H_k[S^r(I)]$ sur $H_k[S^r(I/I^2)]$. Comme ils passent au travers de $H_k[I^r]$, on obtient des homomorphismes surjectifs de $H_k[I^r]$ sur $H_k[I^r/I^{r+1}]$ pour $k \leqslant n+1$ et pour $r \geqslant 0$, sauf peut-être pour $k = n+1$ et pour $r = 1$. Il en découle une suite exacte pour $r \neq 1$

$$0 \to H_n[I^{r+1}] \to H_n[I^r] \to H_n[I^r/I^{r+1}] \to 0$$

et pour $r = 1$ il faut remplacer le 0 de gauche par $0 \to \Omega_{n+1}$ pour obtenir encore une suite exacte. Grâce au théorème de convergence, on peut sommer sur r et obtenir un isomorphisme non-canonique

$$H_n[S(I/I^2)] \cong H_n[R] + \Omega_{n+1}\,.$$

La dimension du H_n de droite est donnée par le coefficient de x^n dans la série

$$(1+x)^{\varepsilon_1}(1-x^2)^{-\varepsilon_2} \dots (1+(-1)^{n+1}x^n)^{(-1)^{n+1}\varepsilon_n}$$

et la dimension du H_n de gauche est donnée par le coefficient de x^n dans la série

$$(1+x)^{\delta_1}(1-x^2)^{-\delta_2}\dots(1+(-1)^{n+1}x^n)^{(-1)^{n+1}\delta_n}$$

cette fois seulement si n est au plus $2p$. Mais comme δ_k et ε_k sont égaux pour $k < n$, il reste une égalité simple $\delta_n = \varepsilon_n + \omega_{n+1}$. Comme par ailleurs on a une inégalité $\varepsilon_n \geqslant \delta_n$ due à la surjectivité de η_n, cela ne se peut que sous la forme $\delta_n = \varepsilon_n$ (et η_n est un isomorphisme) et $\omega_{n+1} = 0$ (et η_{n+1} est un épimorphisme). On peut donc démontrer la condition C_n par induction sur $n \leqslant 2p+1$ et les nombres δ_n et ε_n sont égaux pour $n \leqslant 2p$ (ou quelconque en caractéristique nulle).

La 2p + 1-ème déviation

Nous venons de le constater, l'homomorphisme η_{2p+1} est une surjection. Par conséquent on a une première inégalité, à savoir $\varepsilon_{2p+1} \geqslant \delta_{2p+1}$. Ce qui a été fait ci-dessus pour $n \leqslant 2p$ peut être répété en partie pour $n = 2p+1$. Mais alors la dimension du n-ème module d'homologie de $S(I/I^2)$ est donné par le coefficient de x^{2p+1} dans la série modifiée suivante

$$(1+x)^{\delta_1}\dots(1-x^{2p})^{-\delta_{2p}}(1+x^{2p+1})^{\delta_{2p+1}+\delta_3}.$$

Cela conduit finalement à l'égalité simple

$$\delta_{2p+1} + \delta_3 = \varepsilon_{2p+1} + \omega_{2p+2}$$

Il en découle bien l'inégalité annoncée

$$\delta_{2p+1} \leqslant \varepsilon_{2p+1} \leqslant \delta_{2p+1} + \delta_3 .$$

En particulier les homomorphismes η_{2p+1} et η_{2p+2} sont tous deux des isomorphismes dans le seul cas dégénéré où l'invariant δ_3 est nul. Il s'agit du cas où l'anneau local A, complété si nécessaire, est un anneau d'intersection complète, ce qui entraîne par ailleurs la nullité des déviations ε_i et des invariants δ_i pour $i \geqslant 3$. Il n'est pas exclu que l'on ait pourtant des égalités $\delta_{2p+1} = \varepsilon_{2p+1}$ et $\delta_{2p+2} = \varepsilon_{2p+2}$, sans isomorphisme, dans des cas non dégénérés.

De manière générale, considérons une K-algèbre simpliciale augmentée R d'idéal d'augmentation connexe I. On dénote par J le sous-espace produit $H[I].H[I]$ de $H[I]$, les puissances divisées n'intervenant pas car nous allons considérer des degrés impairs. Soit $\bar{K}$ une autre copie de K, opérant sur $H[I]$ grâce à l'homomorphisme identité et opérant sur K grâce à l'homomorphisme de Frobenius. On peut alors construire un homomorphisme utile π

$$K \otimes_{\bar{K}} H_3[I]/J_3 \to H_{2p+1}[I]/J_{2p+1}\,.$$

Pour cela on considère un homomorphisme surjectif $\sigma\colon \tilde{R} \to R$, la K-algèbre simpliciale augmentée $\tilde{R}$ étant supposée acyclique. Un élément x du quotient H_3/J_3 est représenté par un élément de H_3, donc par un 3-cycle de I ou encore par une 3-chaîne de $\tilde{I}$ notée ξ. La p-ème puissance divisée du 2-bord $d\xi$ de $\tilde{I}$ est un $2p$-cycle de $\tilde{I}$, donc un $2p$-bord de $\tilde{I}$

$$\gamma^p(d\,\xi) = d\eta\,.$$

Il s'agit là d'un élément du noyau de σ. Par conséquent η représente un $2p+1$-cycle de I, donc un élément de H_{2p+1} ou encore un élément y du quotient H_{2p+1}/J_{2p+1}. Après les vérifications d'usage, on pose la définition $\pi(1 \otimes x) = y$. L'homomorphisme π étant défini, on n'oublie pas l'homomorphisme η_{2p+1}

$$H_{2p+1}[I]/J_{2p+1} \to H_{2p+1}[I/I^2]$$

défini lui aussi en toute généralité.

L'homomorphisme π est nul, lorsque le carré I^2 est nul. Par conséquent l'image de π est contenue dans le noyau de η_{2p+1} dans tous les cas. Parfois on obtient même une égalité. La théorie du produit symétrique montre que c'est bien le cas, lorsque la K-algèbre simpliciale augmentée R est égale à K-algèbre symétrique $S(L)$ d'un K-module simplicial connexe L. Il s'agira aussi d'une égalité dans le cas qui nous intéresse ici.

La K-algèbre simpliciale augmentée R est à nouveau celle donnant lieu au complexe cotangent. On sait surjectifs les homomorphismes canoniques de $H_k[I]$ dans $H_k[I/I^2]$ pour $0 \leqslant k \leqslant 2p+1$. On a donc des homomorphismes surjectifs de $H_{2p+1}[S^r(I)]$ dans $H_{2p+1}[S^r(I/I^2)]$ pour tout r. En utilisant le théorème de convergence et une induction sur r décroissant, on démontre alors que les homomorphismes canoniques de $H_{2p+1}[S^r(I)]$ dans $H_{2p+1}[I^r]$ sont eux aussi surjectifs. On a donc la situation suivante. L'injection canonique du K-module simplicial I dans la K-algèbre simpliciale R se prolonge en un homomorphisme de la K-algèbre simpliciale $\hat{R}$, égale à la K-algèbre simpliciale $S(I)$, dans la K-algèbre simpliciale R, le tout donnant lieu à des épimorphismes

$$H_{2p+1}[\hat{I}^r] \to H_{2p+1}[I^r]$$

en particulier pour r égal à 2. Grâce à cet épimorphisme, de l'égalité de

l'image de $\hat{\pi}$ et du noyau de $\hat{\eta}_{2p+1}$, mentionnée précédemment, découle l'égalité de l'image de π et du noyau de η_{2p+1}. En particulier η_{2p+1} est un isomorphisme si et seulement si π est un homomorphisme nul.

Situation générique

Il faut considérer le K-module $H_3\,[I]/J_3$, autrement dit le K-module quotient

$$\mathrm{Tor}_3^A(K, K)/\mathrm{Tor}_2^A(K, K)\,.\ \mathrm{Tor}_1^A(K, K)\,.$$

Il s'agit là du quotient H_2/H_1. H_1 en homologie à la Koszul et un élément t du quotient de Tor_3 par Tor_2. Tor_1 est donc représentable par un élément g facile à expliciter à l'aide d'un système minimal de générateurs $m_1, m_2, \ldots, m_n$ de l'idéal maximal M de l'anneau local A. Ce représentant g a la forme

$$\Sigma \mu_{ij}\, dm_i \wedge dm_j \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant n$$

avec la condition usuelle de cycle pour $1 \leqslant i \leqslant n$

$$\Sigma \mu_{ij}\, m_j = 0 \qquad 1 \leqslant j \leqslant n$$

en posant μ_{ii} égal à 0 et μ_{ji} égal à $-\mu_{ij}$. Cela étant, avec un anneau B, il est naturel de considérer la B-algèbre Bn engendrée par les $n(n+1)/2$ générateurs

$$x_i \text{ avec } 1 \leqslant i \leqslant n \quad \text{et} \quad y_{jk} \text{ avec } 1 \leqslant j < k \leqslant n$$

et soumise aux n relations pour $1 \leqslant i \leqslant n$

$$\Sigma\, y_{ij}\, x_j = 0 \qquad 1 \leqslant j \leqslant n$$

en posant y_{ii} égal à 0 et y_{ji} égal à $-y_{ij}$. Mais alors l'élément gn

$$\Sigma y_{ij}\, dx_i \wedge dx_j \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant n$$

représente un élément important tn du quotient

$$\mathrm{Tor}_3^{Bn}(B, B)/\mathrm{Tor}_2^{Bn}(B, B)\,.\,\mathrm{Tor}_1^{Bn}(B, B)\,.$$

L'homomorphisme utilisé de Bn dans B est l'unique homomorphisme de B-algèbres qui envoie les générateurs x_i et y_{jk} sur 0.

Les B-algèbres Bn et $Zn \otimes_Z B$ sont isomorphes. Considérons une résolution simpliciale $Pn\,(Z)$ de la Zn-algèbre Z. Comme le Z-module Zn est

libre, le produit tensoriel $Pn\,(Z) \otimes_Z B$ est une résolution simpliciale $Pn\,(B)$ de la Bn-algèbre B. Considérons encore les produits tensoriels importants

$$Rn\,(Z) = Pn\,(Z) \otimes_{Zn} Z \text{ et } Rn\,(B) = Pn\,(B) \otimes_{Bn} B\,.$$

Les B-algèbres simpliciales $Rn\,(Z) \otimes_Z B$ et $Rn\,(B)$ sont alors isomorphes de manière élémentaire.

Considérons maintenant l'homomorphisme de l'anneau Zn dans l'anneau A qui envoie les générateurs x_i sur les éléments m_i et les générateurs y_{jk} sur les éléments μ_{jk}. Par nature, cet homomorphisme est appelé à varier. Au niveau des quotients de Tor_3 par $\mathrm{Tor}_2 . \mathrm{Tor}_1$, l'homomorphisme correspondant envoie l'élément générique tn sur l'élément quelconque t donné initialement. L'homomorphisme de Zn dans A donne un homomorphisme de $Rn\,(Z)$ dans R, donc un homomorphisme de $Rn\,(K)$ dans R, par produit tensoriel.

En résumé, on a la K-algèbre simpliciale R qui donne lieu au complexe cotangent de la A-algèbre K, avec l'homomorphisme π correspondant, et la K-algèbre simpliciale Rn qui donne lieu au complexe cotangent de la Kn-algèbre K, avec l'homomorphisme πn correspondant. De plus il existe un homomorphisme de Rn dans R plaçant finalement tn au-dessus de t et πn au-dessus de π. En particulier l'homomorphisme π est nul en entier, si l'homomorphisme πn est nul sur l'élément générique. Il reste à préciser quel est l'élément $\pi n\,(tn)$. On peut localiser Kn sans rien changer, si on le désire. Enfin dénotons par Mn le noyau de l'homomorphisme de Kn sur K. L'idéal Mn a $n\,(n+1)/2$ générateurs, alors que l'idéal M a n générateurs.

Conclusion

Considérons une résolution libre et multiplicative $\tilde{F}n$ de la Kn-algèbre K et dénotons par Fn le produit tensoriel $\tilde{F}n \otimes_{Kn} K$ qui permet le calcul de $\mathrm{Tor}^{Kn}\,(K, K)$. Dans la définition de l'homomorphisme πn, on peut remplacer les K-algèbres simpliciales Rn et $\tilde{R}n$ par les K-algèbres différentielles Fn et $\tilde{F}n$. L'élément gn appartient alors à $\tilde{F}n \otimes_{Kn} Mn$ et représente un élément de l'espace vectoriel

$$\mathrm{Tor}_2^{Kn}\,(K, Mn) \cong \mathrm{Tor}_3^{Kn}\,(K, K)\,.$$

Il faut alors considérer hn, la p-ème puissance divisée de gn, qui est l'élément suivant de $\widetilde{Fn} \otimes_{Kn} Mn$, avec le degré $2p$,

$$\Sigma y_{i_1 i_2 \ldots i_{2p-1} i_{2p}} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{2p-1}} \wedge dx_{i_{2p}}$$

avec la condition $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{2p-1} < i_{2p} \leqslant n$ et avec la définition classique

$$y_{i_1 i_2 \ldots i_{2p-1} i_{2p}} = \Sigma \text{ sign } \sigma \, y_{\sigma_1 \sigma_2} \cdot \ldots \cdot y_{\sigma_{2p-1} \sigma_{2p}}$$

où la permutation σ des $2p$ éléments i_j est soumise aux restrictions suivantes

$$\sigma_1 < \sigma_3 < \ldots < \sigma_{2p-1}, \quad \sigma_1 < \sigma_2, \ldots, \sigma_{2p-1} < \sigma_{2p}.$$

Mais alors l'élément $\pi n\,(tn)$ est nul si et seulement s'il existe une famille d'éléments α_j et β_j dans $\widetilde{Fn}$ avec les propriétés simples suivantes. En premier lieu, les éléments α_j et β_j sont tous de degrés strictement positifs. En deuxième lieu, les bords $d\alpha_j$ et $d\beta_j$ sont tous des éléments de $\widetilde{Fn} \otimes_{Kn} Mn$. En troisième lieu, l'élément hn est égal à la somme des bords $d\,(\alpha_j . \beta_j)$.

Lorsque l'idéal M est engendré par $2p$-1 éléments, on peut utiliser Kn avec n égal à $2p$-1. Mais alors hn est nul de manière élémentaire. Par conséquent π est nul et on obtient un isomorphisme η_{2p+1} de manière naturelle.

Lorsque l'idéal M a sa p-ème puissance nulle, on peut remplacer Kn par le quotient $Kn/(Mn)^p$. Mais alors hn modifié est nul de manière élémentaire. Par conséquent π est nul et on obtient un isomorphisme η_{2p+1} de manière naturelle.

La plus petite algèbre Kn qui risque d'être intéressante est donc celle avec p égal à 2 et n égal à 4. Un long calcul démontre en fait que l'élément $\pi n\,(tn)$ n'est pas nul. Par conséquent, il existe un anneau local de caractéristique 2, dont l'idéal maximal a 10 générateurs et pour lequel l'épimorphisme η_5 n'est pas un isomorphisme, autrement dit pour lequel ε_5 est strictement supérieur à δ_5. A vrai dire, il existe des anneaux beaucoup plus petits avec cette inégalité, par exemple certains anneaux finis dont les idéaux maximaux ont exactement 4 générateurs.

BIBLIOGRAPHIE

[1] André, M. Hopf algebras with divided powers. *J. Algebra 18* (1971), 19-50.
[2] —— *Homologie des algèbres commutatives*. Springer, 1974.
[3] Cartan, H. *Séminaire 1954/1955*. Benjamin, 1967.

[4] DOLD, A. et R. THOM. Quasifaserungen und unendliche symmetrische Produkte. *Annals Math. 67* (1958), 239-280.
[5] NICOLLERAT, M.-A. Homologie des produits symétriques. *A paraître.*
[6] QUILLEN, D. On the homology of commutative rings. *Proc. Sym. Pure Math. 17* (1970), 65-87.

(Reçu le 6 mai 1977)

Michel André

Département de Mathématiques
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
61, Avenue de Cour
1007 Lausanne