Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 23 (1977)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA (2p+1)-ÈME DÉVIATION D'UN ANNEAU LOCAL
Autor: André, Michel
Kapitel: Introduction
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-48929

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

où $T_i(A, K, K)$ est l'espace vectoriel des éléments indécomposables de $\mathrm{Tor}_i^A(K, K)$. Mais alors l'égalité $\delta_{2p+1} = \varepsilon_{2p+1}$ a lieu si et seulement si π est l'application nulle. Un exemple va montrer que cette propriété n'est pas toujours satisfaite.

L'espace vectoriel $T_3(A, K, K)$, qui concerne la notion d'intersection complète, est un quotient du deuxième module d'homologie à la Koszul. Il est donc possible de remplacer la paire quelconque (A, α), où α appartient à $T_3(A, K, K)$, par une paire générique $(\tilde{A}, \tilde{\alpha})$. La situation se simplifie maintenant: ou bien l'élément $\tilde{\pi}(\tilde{\alpha})$ est nul et alors π est toujours nul et δ_{2p+1} est toujours égal à ε_{2p+1}, ou bien l'élément $\tilde{\pi}(\tilde{\alpha})$ n'est pas nul et alors $\tilde{A}$ fournit l'exemple recherché d'un anneau avec δ_{2p+1} strictement inférieur à ε_{2p+1}. Le calcul montre que l'élément $\tilde{\pi}(\tilde{\alpha})$ n'est pas nul. Il faut donc se contenter de la propriété suivante:

$$\delta_{2p+1} \leqslant \varepsilon_{2p+1} \leqslant \delta_{2p+1} + \varepsilon_3 .$$

Le cas où ε_3 est nul n'apporte rien de nouveau. En effet l'anneau A est alors une intersection complète, ce qui oblige la déviation ε_{2p+1} et l'invariant δ_{2p+1} à être nuls.

Introduction

Il est possible de résoudre projectivement le A-module K par une A-algèbre simpliciale P qui est libre en chaque degré, comme A-algèbre. Le produit tensoriel $P \otimes_A K$ est alors une K-algèbre simpliciale R qui est libre en chaque degré, comme K-algèbre. L'espace vectoriel $H_n[R]$ est évidemment toujours égal à l'espace vectoriel $\mathrm{Tor}_n^A(K, K)$. De plus la K-algèbre simpliciale R est munie d'une augmentation $\rho: R \to K$. Son noyau I est un idéal simplicial de l'anneau simplicial R. Il est utile d'en considérer les puissances successives I^k, calculées degré par degré. En particulier le quotient I/I^2 est un K-module simplicial, dont le complexe correspondant est par définition le complexe cotangent de la A-algèbre K. L'espace vectoriel $H_n[I/I^2]$, qui est l'espace vectoriel $H_n(A, K, K)$ de la théorie de l'homologie des algèbres commutatives, a une dimension finie δ_n, l'anneau local A étant supposé noethérien.

Dénotons par S^r le foncteur « r-ème produit symétrique » de la catégorie des K-modules et par S leur somme directe, qui est le foncteur « algèbre

symétrique». Degré par degré, on prolonge ces foncteurs à la catégorie des K-modules simpliciaux. Si M est un K-module simplicial, alors l'homologie $H[SM]$ a une structure naturelle d'algèbre de Hopf à puissances divisées et par conséquent sa série de Poincaré a la forme suivante

$$\Sigma\, b_j\, x^j = (1+x)^{e_1}(1-x^2)^{-e_2}\ldots .$$

Les nombres de Betti b_j sont les dimensions des espaces vectoriels $H_j[SM]$ et les nombres positifs ou nuls e_i peuvent être calculés explicitement, soit par voie topologique selon la méthode de Dold-Thom, soit par voie algébrique selon la méthode de M.-A. Nicollerat. Les nombres e_i se calculent à l'aide des nombres m_i qui sont les dimensions des espaces vectoriels $H_i[M]$. Le résultat partiel suivant est suffisant ici: d'une part e_i est égal à m_i pour $i \leqslant 2p$ et d'autre part e_{2p+1} est égal à la somme $m_{2p+1} + m_3$.

Comme la K-algèbre augmentée R est libre en chaque degré, il existe pour tout r un isomorphisme de K-modules simpliciaux de $S^r(I/I^2)$ sur I^r/I^{r+1}. Par conséquent l'homologie du K-module simplicial I/I^2 (formée des espaces vectoriels $H_i(A, K, K)$ connus par leurs dimensions δ_i) détermine complètement l'homologie des K-modules simpliciaux I^r/I^{r+1}. Par ailleurs l'homologie du K-module simplicial $I^0 = R$ (formée des espaces vectoriels $\mathrm{Tor}_j^A(K, K)$ connus par leurs dimensions β_j données par les déviations ε_i) peut être filtrée par les images de l'homologie des K-modules simpliciaux I^r. Il reste donc à faire le passage de l'homologie du K-module simplicial I^r/I^{r+1} à l'homologie du K-module simplicial I^r. La situation se présente de manière correcte (on a en fait une suite spectrale du premier quadrant) grâce au théorème de convergence de D. Quillen. On a $H_m[I^n]$ nul pour toute paire $m < n$, comme le démontre un argument de nature purement simpliciale.

Les 2p premières déviations

Grâce au théorème d'Eilenberg-Zilber et grâce au foncteur F^r, noyau de la transformation naturelle du foncteur $\otimes^r$ sur le foncteur S^r, on peut démontrer le résultat utile suivant. Si un épimorphisme λ entre des K-modules simpliciaux connexes donne des épimorphismes $H_k[\lambda]$ pour $k = 0,\ldots,n$, alors il donne des épimorphismes $H_k[S^r\lambda]$ pour $k = 0,\ldots, n+1$ et pour r quelconque, sauf peut-être pour $k = n+1$ et $r = 1$, bien entendu. On peut appliquer ce résultat à l'homomorphisme canonique de I sur I/I^2.