2p premières déviations

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1977)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **05.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

symétrique». Degré par degré, on prolonge ces foncteurs à la catégorie des K-modules simpliciaux. Si M est un K-module simplicial, alors l'homologie $H[SM]$ a une structure naturelle d'algèbre de Hopf à puissances divisées et par conséquent sa série de Poincaré a la forme suivante

$$\Sigma\, b_j\, x^j = (1+x)^{e_1}(1-x^2)^{-e_2} \dots .$$

Les nombres de Betti b_j sont les dimensions des espaces vectoriels $H_j[SM]$ et les nombres positifs ou nuls e_i peuvent être calculés explicitement, soit par voie topologique selon la méthode de Dold-Thom, soit par voie algébrique selon la méthode de M.-A. Nicollerat. Les nombres e_i se calculent à l'aide des nombres m_i qui sont les dimensions des espaces vectoriels $H_i[M]$. Le résultat partiel suivant est suffisant ici: d'une part e_i est égal à m_i pour $i \leqslant 2p$ et d'autre part e_{2p+1} est égal à la somme $m_{2p+1} + m_3$.

Comme la K-algèbre augmentée R est libre en chaque degré, il existe pour tout r un isomorphisme de K-modules simpliciaux de $S^r(I/I^2)$ sur I^r/I^{r+1}. Par conséquent l'homologie du K-module simplicial I/I^2 (formée des espaces vectoriels $H_i(A, K, K)$ connus par leurs dimensions δ_i) détermine complètement l'homologie des K-modules simpliciaux I^r/I^{r+1}. Par ailleurs l'homologie du K-module simplicial $I^0 = R$ (formée des espaces vectoriels $\mathrm{Tor}_j^A(K, K)$ connus par leurs dimensions β_j données par les déviations ε_i) peut être filtrée par les images de l'homologie des K-modules simpliciaux I^r. Il reste donc à faire le passage de l'homologie du K-module simplicial I^r/I^{r+1} à l'homologie du K-module simplicial I^r. La situation se présente de manière correcte (on a en fait une suite spectrale du premier quadrant) grâce au théorème de convergence de D. Quillen. On a $H_m[I^n]$ nul pour toute paire $m < n$, comme le démontre un argument de nature purement simpliciale.

Les 2p premières déviations

Grâce au théorème d'Eilenberg-Zilber et grâce au foncteur F^r, noyau de la transformation naturelle du foncteur $\otimes^r$ sur le foncteur S^r, on peut démontrer le résultat utile suivant. Si un épimorphisme λ entre des K-modules simpliciaux connexes donne des épimorphismes $H_k[\lambda]$ pour $k = 0,\dots,n$, alors il donne des épimorphismes $H_k[S^r\lambda]$ pour $k = 0,\dots, n+1$ et pour r quelconque, sauf peut-être pour $k = n+1$ et $r = 1$, bien entendu. On peut appliquer ce résultat à l'homomorphisme canonique de I sur I/I^2.

On va utiliser l'homomorphisme canonique de $H_n[I]$ dans $H_n[I/I^2]$, autrement dit de $\mathrm{Tor}_n^A(K,K)$ dans $H_n(A,K,K)$, pour n différent de 0. Les produits non-triviaux de $H[I]$ proviennent de l'image de l'homomorphisme de $H[I] \otimes H[I]$ dans $H[I]$, qui passe au travers de $H[I^2]$ et les puissances divisées de $H[I]$ proviennent de l'image de l'application partiellement définie de $H[I]$ dans $H[I]$, qui passe au travers de $H[I^p]$ donc de $H[I^2]$. Cela étant remarqué, on peut donc définir un homomorphisme canonique et utile

$$\eta_n : T_n(A, K, K) \to H_n(A, K, K)$$

avec l'isomorphisme de définition

$$T_n(A, K, K) \cong \mathrm{Tor}_n^A(K, K) / J_n$$

où J_n est le sous-espace vectoriel engendré par tous les produits non-triviaux de degré n et par toutes les puissances divisées de degré n. Comme ici le degré n est au plus égal à $2p+1$, les puissances divisées interviennent dans le seul degré $2p$. Par la théorie des algèbres de Hopf à puissances divisées, il est clair que l'espace vectoriel $T_n(A, K, K)$ a la dimension ε_n. Par suite on a une inégalité $\delta_n \leqslant \varepsilon_n$ si η_n est un épimorphisme et une égalité $\delta_n = \varepsilon_n$ si η_n est un isomorphisme. Appelons Ω_n le conoyau de l'homomorphisme η_n et ω_n la dimension de Ω_n.

Considérons la condition C_n suivante: d'une part η_k est un isomorphisme pour $k \leqslant n-1$ et d'autre part η_n est un épimorphisme. On a donc des homomorphismes surjectifs de $H_k[S^r(I)]$ sur $H_k[S^r(I/I^2)]$. Comme ils passent au travers de $H_k[I^r]$, on obtient des homomorphismes surjectifs de $H_k[I^r]$ sur $H_k[I^r/I^{r+1}]$ pour $k \leqslant n+1$ et pour $r \geqslant 0$, sauf peut-être pour $k = n+1$ et pour $r = 1$. Il en découle une suite exacte pour $r \neq 1$

$$0 \to H_n[I^{r+1}] \to H_n[I^r] \to H_n[I^r/I^{r+1}] \to 0$$

et pour $r = 1$ il faut remplacer le 0 de gauche par $0 \to \Omega_{n+1}$ pour obtenir encore une suite exacte. Grâce au théorème de convergence, on peut sommer sur r et obtenir un isomorphisme non-canonique

$$H_n[S(I/I^2)] \cong H_n[R] + \Omega_{n+1}\,.$$

La dimension du H_n de droite est donnée par le coefficient de x^n dans la série

$$(1+x)^{\varepsilon_1}(1-x^2)^{-\varepsilon_2} \dots (1+(-1)^{n+1}x^n)^{(-1)^{n+1}\varepsilon_n}$$

et la dimension du H_n de gauche est donnée par le coefficient de x^n dans la série

$$(1+x)^{\delta_1}(1-x^2)^{-\delta_2}\dots(1+(-1)^{n+1}x^n)^{(-1)^{n+1}\delta_n}$$

cette fois seulement si n est au plus $2p$. Mais comme δ_k et ε_k sont égaux pour $k < n$, il reste une égalité simple $\delta_n = \varepsilon_n + \omega_{n+1}$. Comme par ailleurs on a une inégalité $\varepsilon_n \geqslant \delta_n$ due à la surjectivité de η_n, cela ne se peut que sous la forme $\delta_n = \varepsilon_n$ (et η_n est un isomorphisme) et $\omega_{n+1} = 0$ (et η_{n+1} est un épimorphisme). On peut donc démontrer la condition C_n par induction sur $n \leqslant 2p+1$ et les nombres δ_n et ε_n sont égaux pour $n \leqslant 2p$ (ou quelconque en caractéristique nulle).

La 2p + 1-ème déviation

Nous venons de le constater, l'homomorphisme η_{2p+1} est une surjection. Par conséquent on a une première inégalité, à savoir $\varepsilon_{2p+1} \geqslant \delta_{2p+1}$. Ce qui a été fait ci-dessus pour $n \leqslant 2p$ peut être répété en partie pour $n = 2p+1$. Mais alors la dimension du n-ème module d'homologie de $S(I/I^2)$ est donné par le coefficient de x^{2p+1} dans la série modifiée suivante

$$(1+x)^{\delta_1}\dots(1-x^{2p})^{-\delta_{2p}}(1+x^{2p+1})^{\delta_{2p+1}+\delta_3}.$$

Cela conduit finalement à l'égalité simple

$$\delta_{2p+1} + \delta_3 = \varepsilon_{2p+1} + \omega_{2p+2}$$

Il en découle bien l'inégalité annoncée

$$\delta_{2p+1} \leqslant \varepsilon_{2p+1} \leqslant \delta_{2p+1} + \delta_3 .$$

En particulier les homomorphismes η_{2p+1} et η_{2p+2} sont tous deux des isomorphismes dans le seul cas dégénéré où l'invariant δ_3 est nul. Il s'agit du cas où l'anneau local A, complété si nécessaire, est un anneau d'intersection complète, ce qui entraîne par ailleurs la nullité des déviations ε_i et des invariants δ_i pour $i \geqslant 3$. Il n'est pas exclu que l'on ait pourtant des égalités $\delta_{2p+1} = \varepsilon_{2p+1}$ et $\delta_{2p+2} = \varepsilon_{2p+2}$, sans isomorphisme, dans des cas non dégénérés.

De manière générale, considérons une K-algèbre simpliciale augmentée R d'idéal d'augmentation connexe I. On dénote par J le sous-espace produit $H[I].H[I]$ de $H[I]$, les puissances divisées n'intervenant pas car nous allons considérer des degrés impairs. Soit $\bar{K}$ une autre copie de K, opérant sur $H[I]$ grâce à l'homomorphisme identité et opérant sur K grâce à l'homomorphisme de Frobenius. On peut alors construire un homomorphisme utile π