Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 23 (1977)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA (2p+1)-ÈME DÉVIATION D'UN ANNEAU LOCAL
Autor: André, Michel
Kapitel: 2p + 1-ème déviation
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-48929

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 06.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

$$(1+x)^{\delta_1}(1-x^2)^{-\delta_2}\dots(1+(-1)^{n+1}x^n)^{(-1)^{n+1}\delta_n}$$

cette fois seulement si n est au plus $2p$. Mais comme δ_k et ε_k sont égaux pour $k < n$, il reste une égalité simple $\delta_n = \varepsilon_n + \omega_{n+1}$. Comme par ailleurs on a une inégalité $\varepsilon_n \geqslant \delta_n$ due à la surjectivité de η_n, cela ne se peut que sous la forme $\delta_n = \varepsilon_n$ (et η_n est un isomorphisme) et $\omega_{n+1} = 0$ (et η_{n+1} est un épimorphisme). On peut donc démontrer la condition C_n par induction sur $n \leqslant 2p+1$ et les nombres δ_n et ε_n sont égaux pour $n \leqslant 2p$ (ou quelconque en caractéristique nulle).

La 2p + 1-ème déviation

Nous venons de le constater, l'homomorphisme η_{2p+1} est une surjection. Par conséquent on a une première inégalité, à savoir $\varepsilon_{2p+1} \geqslant \delta_{2p+1}$. Ce qui a été fait ci-dessus pour $n \leqslant 2p$ peut être répété en partie pour $n = 2p+1$. Mais alors la dimension du n-ème module d'homologie de $S(I/I^2)$ est donné par le coefficient de x^{2p+1} dans la série modifiée suivante

$$(1+x)^{\delta_1}\dots(1-x^{2p})^{-\delta_{2p}}(1+x^{2p+1})^{\delta_{2p+1}+\delta_3}.$$

Cela conduit finalement à l'égalité simple

$$\delta_{2p+1} + \delta_3 = \varepsilon_{2p+1} + \omega_{2p+2}$$

Il en découle bien l'inégalité annoncée

$$\delta_{2p+1} \leqslant \varepsilon_{2p+1} \leqslant \delta_{2p+1} + \delta_3 .$$

En particulier les homomorphismes η_{2p+1} et η_{2p+2} sont tous deux des isomorphismes dans le seul cas dégénéré où l'invariant δ_3 est nul. Il s'agit du cas où l'anneau local A, complété si nécessaire, est un anneau d'intersection complète, ce qui entraîne par ailleurs la nullité des déviations ε_i et des invariants δ_i pour $i \geqslant 3$. Il n'est pas exclu que l'on ait pourtant des égalités $\delta_{2p+1} = \varepsilon_{2p+1}$ et $\delta_{2p+2} = \varepsilon_{2p+2}$, sans isomorphisme, dans des cas non dégénérés.

De manière générale, considérons une K-algèbre simpliciale augmentée R d'idéal d'augmentation connexe I. On dénote par J le sous-espace produit $H[I].H[I]$ de $H[I]$, les puissances divisées n'intervenant pas car nous allons considérer des degrés impairs. Soit $\bar{K}$ une autre copie de K, opérant sur $H[I]$ grâce à l'homomorphisme identité et opérant sur K grâce à l'homomorphisme de Frobenius. On peut alors construire un homomorphisme utile π

$$K \otimes_{\bar{K}} H_3[I]/J_3 \to H_{2p+1}[I]/J_{2p+1}\,.$$

Pour cela on considère un homomorphisme surjectif $\sigma\colon \tilde{R} \to R$, la K-algèbre simpliciale augmentée $\tilde{R}$ étant supposée acyclique. Un élément x du quotient H_3/J_3 est représenté par un élément de H_3, donc par un 3-cycle de I ou encore par une 3-chaîne de $\tilde{I}$ notée ξ. La p-ème puissance divisée du 2-bord $d\xi$ de $\tilde{I}$ est un $2p$-cycle de $\tilde{I}$, donc un $2p$-bord de $\tilde{I}$

$$\gamma^p(d\,\xi) = d\eta\,.$$

Il s'agit là d'un élément du noyau de σ. Par conséquent η représente un $2p+1$-cycle de I, donc un élément de H_{2p+1} ou encore un élément y du quotient H_{2p+1}/J_{2p+1}. Après les vérifications d'usage, on pose la définition $\pi(1 \otimes x) = y$. L'homomorphisme π étant défini, on n'oublie pas l'homomorphisme η_{2p+1}

$$H_{2p+1}[I]/J_{2p+1} \to H_{2p+1}[I/I^2]$$

défini lui aussi en toute généralité.

L'homomorphisme π est nul, lorsque le carré I^2 est nul. Par conséquent l'image de π est contenue dans le noyau de η_{2p+1} dans tous les cas. Parfois on obtient même une égalité. La théorie du produit symétrique montre que c'est bien le cas, lorsque la K-algèbre simpliciale augmentée R est égale à K-algèbre symétrique $S(L)$ d'un K-module simplicial connexe L. Il s'agira aussi d'une égalité dans le cas qui nous intéresse ici.

La K-algèbre simpliciale augmentée R est à nouveau celle donnant lieu au complexe cotangent. On sait surjectifs les homomorphismes canoniques de $H_k[I]$ dans $H_k[I/I^2]$ pour $0 \leqslant k \leqslant 2p+1$. On a donc des homomorphismes surjectifs de $H_{2p+1}[S^r(I)]$ dans $H_{2p+1}[S^r(I/I^2)]$ pour tout r. En utilisant le théorème de convergence et une induction sur r décroissant, on démontre alors que les homomorphismes canoniques de $H_{2p+1}[S^r(I)]$ dans $H_{2p+1}[I^r]$ sont eux aussi surjectifs. On a donc la situation suivante. L'injection canonique du K-module simplicial I dans la K-algèbre simpliciale R se prolonge en un homomorphisme de la K-algèbre simpliciale $\hat{R}$, égale à la K-algèbre simpliciale $S(I)$, dans la K-algèbre simpliciale R, le tout donnant lieu à des épimorphismes

$$H_{2p+1}[\hat{I}^r] \to H_{2p+1}[I^r]$$

en particulier pour r égal à 2. Grâce à cet épimorphisme, de l'égalité de

l'image de $\hat{\pi}$ et du noyau de $\hat{\eta}_{2p+1}$, mentionnée précédemment, découle l'égalité de l'image de π et du noyau de η_{2p+1}. En particulier η_{2p+1} est un isomorphisme si et seulement si π est un homomorphisme nul.

Situation générique

Il faut considérer le K-module $H_3\,[I]/J_3$, autrement dit le K-module quotient

$$\mathrm{Tor}_3^A(K, K)/\mathrm{Tor}_2^A(K, K)\,.\ \mathrm{Tor}_1^A(K, K)\,.$$

Il s'agit là du quotient H_2/H_1. H_1 en homologie à la Koszul et un élément t du quotient de Tor_3 par Tor_2. Tor_1 est donc représentable par un élément g facile à expliciter à l'aide d'un système minimal de générateurs $m_1, m_2, \ldots, m_n$ de l'idéal maximal M de l'anneau local A. Ce représentant g a la forme

$$\Sigma \mu_{ij}\, dm_i \wedge dm_j \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant n$$

avec la condition usuelle de cycle pour $1 \leqslant i \leqslant n$

$$\Sigma \mu_{ij}\, m_j = 0 \qquad 1 \leqslant j \leqslant n$$

en posant μ_{ii} égal à 0 et μ_{ji} égal à $-\mu_{ij}$. Cela étant, avec un anneau B, il est naturel de considérer la B-algèbre Bn engendrée par les $n(n+1)/2$ générateurs

$$x_i \text{ avec } 1 \leqslant i \leqslant n \quad \text{et} \quad y_{jk} \text{ avec } 1 \leqslant j < k \leqslant n$$

et soumise aux n relations pour $1 \leqslant i \leqslant n$

$$\Sigma\, y_{ij}\, x_j = 0 \qquad 1 \leqslant j \leqslant n$$

en posant y_{ii} égal à 0 et y_{ji} égal à $-y_{ij}$. Mais alors l'élément gn

$$\Sigma y_{ij}\, dx_i \wedge dx_j \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant n$$

représente un élément important tn du quotient

$$\mathrm{Tor}_3^{Bn}(B, B)/\mathrm{Tor}_2^{Bn}(B, B)\,.\,\mathrm{Tor}_1^{Bn}(B, B)\,.$$

L'homomorphisme utilisé de Bn dans B est l'unique homomorphisme de B-algèbres qui envoie les générateurs x_i et y_{jk} sur 0.

Les B-algèbres Bn et $Zn \otimes_Z B$ sont isomorphes. Considérons une résolution simpliciale $Pn\,(Z)$ de la Zn-algèbre Z. Comme le Z-module Zn est