Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 23 (1977)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA (2p+1)-ÈME DÉVIATION D'UN ANNEAU LOCAL
Autor: André, Michel
Kapitel: Situation générique
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-48929

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 01.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

l'image de $\hat{\pi}$ et du noyau de $\hat{\eta}_{2p+1}$, mentionnée précédemment, découle l'égalité de l'image de π et du noyau de η_{2p+1}. En particulier η_{2p+1} est un isomorphisme si et seulement si π est un homomorphisme nul.

Situation générique

Il faut considérer le K-module $H_3\,[I]/J_3$, autrement dit le K-module quotient

$$\mathrm{Tor}_3^A(K, K)/\mathrm{Tor}_2^A(K, K)\,.\ \mathrm{Tor}_1^A(K, K)\,.$$

Il s'agit là du quotient H_2/H_1. H_1 en homologie à la Koszul et un élément t du quotient de Tor_3 par Tor_2. Tor_1 est donc représentable par un élément g facile à expliciter à l'aide d'un système minimal de générateurs $m_1, m_2, \ldots, m_n$ de l'idéal maximal M de l'anneau local A. Ce représentant g a la forme

$$\Sigma \mu_{ij}\, dm_i \wedge dm_j \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant n$$

avec la condition usuelle de cycle pour $1 \leqslant i \leqslant n$

$$\Sigma \mu_{ij}\, m_j = 0 \qquad 1 \leqslant j \leqslant n$$

en posant μ_{ii} égal à 0 et μ_{ji} égal à $-\mu_{ij}$. Cela étant, avec un anneau B, il est naturel de considérer la B-algèbre Bn engendrée par les $n(n+1)/2$ générateurs

$$x_i \text{ avec } 1 \leqslant i \leqslant n \quad \text{et} \quad y_{jk} \text{ avec } 1 \leqslant j < k \leqslant n$$

et soumise aux n relations pour $1 \leqslant i \leqslant n$

$$\Sigma\, y_{ij}\, x_j = 0 \qquad 1 \leqslant j \leqslant n$$

en posant y_{ii} égal à 0 et y_{ji} égal à $-y_{ij}$. Mais alors l'élément gn

$$\Sigma y_{ij}\, dx_i \wedge dx_j \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant n$$

représente un élément important tn du quotient

$$\mathrm{Tor}_3^{Bn}(B, B)/\mathrm{Tor}_2^{Bn}(B, B)\,.\,\mathrm{Tor}_1^{Bn}(B, B)\,.$$

L'homomorphisme utilisé de Bn dans B est l'unique homomorphisme de B-algèbres qui envoie les générateurs x_i et y_{jk} sur 0.

Les B-algèbres Bn et $Zn \otimes_Z B$ sont isomorphes. Considérons une résolution simpliciale $Pn\,(Z)$ de la Zn-algèbre Z. Comme le Z-module Zn est

libre, le produit tensoriel $Pn\,(Z) \otimes_Z B$ est une résolution simpliciale $Pn\,(B)$ de la Bn-algèbre B. Considérons encore les produits tensoriels importants

$$Rn\,(Z) = Pn\,(Z) \otimes_{Zn} Z \text{ et } Rn\,(B) = Pn\,(B) \otimes_{Bn} B\,.$$

Les B-algèbres simpliciales $Rn\,(Z) \otimes_Z B$ et $Rn\,(B)$ sont alors isomorphes de manière élémentaire.

Considérons maintenant l'homomorphisme de l'anneau Zn dans l'anneau A qui envoie les générateurs x_i sur les éléments m_i et les générateurs y_{jk} sur les éléments μ_{jk}. Par nature, cet homomorphisme est appelé à varier. Au niveau des quotients de Tor_3 par $\mathrm{Tor}_2 . \mathrm{Tor}_1$, l'homomorphisme correspondant envoie l'élément générique tn sur l'élément quelconque t donné initialement. L'homomorphisme de Zn dans A donne un homomorphisme de $Rn\,(Z)$ dans R, donc un homomorphisme de $Rn\,(K)$ dans R, par produit tensoriel.

En résumé, on a la K-algèbre simpliciale R qui donne lieu au complexe cotangent de la A-algèbre K, avec l'homomorphisme π correspondant, et la K-algèbre simpliciale Rn qui donne lieu au complexe cotangent de la Kn-algèbre K, avec l'homomorphisme πn correspondant. De plus il existe un homomorphisme de Rn dans R plaçant finalement tn au-dessus de t et πn au-dessus de π. En particulier l'homomorphisme π est nul en entier, si l'homomorphisme πn est nul sur l'élément générique. Il reste à préciser quel est l'élément $\pi n\,(tn)$. On peut localiser Kn sans rien changer, si on le désire. Enfin dénotons par Mn le noyau de l'homomorphisme de Kn sur K. L'idéal Mn a $n\,(n+1)/2$ générateurs, alors que l'idéal M a n générateurs.

Conclusion

Considérons une résolution libre et multiplicative $\tilde{F}n$ de la Kn-algèbre K et dénotons par Fn le produit tensoriel $\tilde{F}n \otimes_{Kn} K$ qui permet le calcul de $\mathrm{Tor}^{Kn}\,(K, K)$. Dans la définition de l'homomorphisme πn, on peut remplacer les K-algèbres simpliciales Rn et $\tilde{R}n$ par les K-algèbres différentielles Fn et $\tilde{F}n$. L'élément gn appartient alors à $\tilde{F}n \otimes_{Kn} Mn$ et représente un élément de l'espace vectoriel

$$\mathrm{Tor}_2^{Kn}\,(K, Mn) \cong \mathrm{Tor}_3^{Kn}\,(K, K)\,.$$