Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 24 (1978)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: MÉTRIQUES KÄHLÉRIENNES ET SURFACES MINIMALES
Autor: Rummler, Hansklaus
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-49706

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

MÉTRIQUES KÄHLÉRIENNES ET SURFACES MINIMALES

par Hansklaus RUMMLER [1])

§ 0. INTRODUCTION

Il est bien connu que dans une variété kählérienne les sous-variétés complexes locales sont des sous-variétés minimales par rapport à la métrique riemanienne induite par la métrique kählérienne donnée. Une première démonstration a été donnée par Wirtinger dans [4] pour $\mathbf{C}^n$ avec la métrique canonique $\Sigma\, dz_i \otimes d\bar{z}_i$. Dans la suite, plusieurs auteurs ont généralisé le résultat pour les variétés kählériennes quelconques (voir par ex. [2] et [3]).

Le but de ce travail est de fournir une preuve que cette condition nécessaire est aussi suffisante pour qu'une métrique hermitienne donnée soit kählérienne. En effet, on démontre un résultat encore plus général: Si toutes les sous-variétés complexes locales de dimension 1 sont des surfaces minimales par rapport à la métrique riemanienne induite par une métrique hermitienne donnée, celle-ci est déjà kählérienne. Il suffit même de montrer l'existence d'une famille assez large de sous-variétés complexes locales de dimension 1 qui sont des surfaces minimales.

La démonstration du résultat susmentionné consiste en deux parties (voir les lemmes 1 et 2 du paragraphe 2): la première prouve que l'hypothèse implique que toutes les sous-variétés complexes locales de dimension 2 sont kählériennes avec la métrique hermitienne induite; la seconde en tire la conclusion que la métrique donnée est déjà kählérienne.

Vu sa simplicité et pour être complet nous donnons également la preuve de la nécessité de la condition.

§ 1. RAPPELS ET NOTATION.

Soit M une variété complexe. Pour chaque $x \in M$ l'espace tangent T_xM est un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$, la structure complexe étant fournie par l'application $(dz_1, ..., dz_n) : T_xM \to \mathbf{C}^n$ si $z_1, ..., z_n$ sont des coor-

[1]) Supporté par une bourse du Fonds national suisse de la Recherche.

données holomorphes en x. La multiplication par le scalaire $i \in \mathbf{C}$ est notée $J : T_xM \to T_xM$. Pour $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, ..., n$ (décomposition en parties réelle et imaginaire) on a donc

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial y_j}, \; J\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_j}, \; j = 1, ..., n \tag{1}$$

Soit $(\, , \,)$ une métrique hermitienne. En la décomposant en ses parties réelle et imaginaire, $(\, , \,) = < \, , \, > + i\omega$, on obtient la métrique riemannienne induite $< \, , \, > \; := Re \, (\, , \,)$ ainsi que la forme différentielle de degré 2, $\omega := \mathrm{Im} \, (\, , \,)$, appelée forme fondamentale.

J, $< \, , \, >$ et ω sont reliés par les formules suivantes:

$$< J\xi, \eta > \; = \; - < \xi, J\eta > , \quad < J\xi, J\eta > \; = \; < \xi, \eta > \tag{2}$$

$$\omega(\xi, \eta) = < \xi, J\eta > \tag{3}$$

pour $\xi, \eta \in T_xM$, $x \in M$.

La métrique hermitienne $(\, , \,)$ est dite *kählérienne*, si sa forme fondamentale est fermée:

$$d\omega = 0 \, . \tag{4}$$

Cette définition est équivalente à une caractérisation plus géométrique: Si D est la connexion de Levi-Civita associée à la métrique riemannienne $< \, , \, >$, alors D est $\mathbf{C}$-linéaire dans la seconde variable, c'est-à-dire on a

$$D_\xi (J\eta) = J(D_\xi \eta) \tag{5}$$

pour tout champ de vecteur η sur M et pour tout vecteur tangent ξ. (Quant à l'équivalence de (4) et (5), voir p. ex. [2], vol. II, p. 142).

Soit maintenant M une variété différentiable (de classe $\mathscr{C}^\infty$) munie d'une métrique riemannienne $< \, , \, >$, et soit D sa connexion de Levi-Civita. Pour une sous-variété différentiable locale N avec un champ de vecteur normal local v (c'est-à-dire $v : N \to TM$, $v(x) \in T_xN^\perp$, $\| v(x) \| = 1$), on définit *l'application de Weingarten* associée à ce champ normal v: c'est l'application $W_x^v = T_xN \to T_xN$, $W_x^v(\xi) = -pr_x(D_\xi v)$, où $pr_x : T_xM \to T_xN$ est la projection orthogonale. W_x^v est définie pour tout x dans le domaine de v, et c'est une application symétrique par rapport à la métrique riemanienne induite sur N. Sa trace décrit la variation de l'élément de volume pour les variations de N dans la direction v, et N est appelée *sous-variété minimale* de M si cette trace $tr\, W_x^v$ est nulle pour tous les champs de vecteur normaux v sur N. (Cf. [2], vol. II, p. 34. Dans le cas classique d'une hyper-surface N dans l'espace euclidien $M = \mathbf{R}^n$,

$tr\ W^v$ est la courbure moyenne de N, orienté par le champ normal v.) C'est une remarque triviale mais très utile que la trace de l'application de Weingarten peut être calculée par la formule suivante :

$$tr\ W_x^v = - \sum_{j=1}^{p} < D_{\xi_j} v\ ,\ \xi_j > \tag{6}$$

si $(\xi_1, ..., \xi_p)$ est une base orthonormale de $T_x N$.

§ 2. Métrique hermitienne et sous-variétés minimales.

Soit de nouveau M une variété complexe dotée d'une métrique hermitienne $(\ ,\ )$. Cette fois, on considère à la fois la structure de variété complexe hermitienne et celle de variété différentiable riemannienne induite, et on se propose de démontrer le théorème suivant:

Théorème. *Pour la métrique hermitienne donnée les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *C'est une métrique kählérienne.*

(b) *Par rapport à la métrique riemannienne induite, toute sous-variété complexe locale de M est une sous-variété minimale.*

(c) *Par rapport à la métrique riemannienne induite, toute sous-variété complexe locale de dimension* 1 *dans M est une surface minimale.*

Remarque. Dans (b) et (c) c'est en général important de considérer les sous-variétés complexes locales parce que (a) est une condition locale et que la famille des sous-variétés complexes globales peut être aussi restreinte qu'elle vérifie (b) sans que la métrique soit kählérienne. Néanmoins, la preuve du théorème montre que dans certains cas il suffit de vérifier (b) ou (c) pour les sous-variétés complexes globales.

Démonstration.

(a) ⇒ (b). Soit N une sous-variété analytique complexe locale dans M avec un champ de vecteur normal v et soient ξ, η deux champs tangents à N. On a alors — avec les notations du paragraphe précédent —

$$\begin{aligned} < D_{J\xi} v, J\eta > &= - < v, D_{J\xi} J\eta > = - < v, J D_{J\xi} \eta > \\ &= - < v, J D_\eta J\xi + J[J\xi, \eta] > = < v, D_\eta \xi > \\ &= < v, D_\xi \eta + [\eta, \xi] > = < v, D_\xi \eta > \\ &= - < D_\xi v, \eta > . \end{aligned}$$

Pour obtenir cette suite d'égalités on utilise la caractérisation (5) d'une métrique kählérienne et les propriétés bien connues de la connexion de Lévi-Civita D ainsi que le fait que les champs de vecteur η, $J\eta$, $[\eta, \xi]$ et $J[J\xi, \eta]$ sont tangents à N et par conséquent perpendiculaires à v.

En calculant maintenant la trace de l'application de Weingarten W_x^v avec la formule (6) pour une base orthonormale de T_xN de la forme $(\xi_1, \ldots, \xi_p, J\xi_1, \ldots, J\xi_p)$ nous trouvons le résultat $tr\, W_x^v = 0$ parce que $< D_{J\xi_i} v, J\xi_i > + < D_{\xi_i} v, \xi_i > = 0$ pour $i = 1, \ldots, p$.

(b) ⇒ (c). C'est trivial!

(c) ⇒ (a). Pour mieux séparer les parties « géométrique » et « analytique » de la démonstration nous la présentons sous forme de deux lemmes:

LEMME 1. *La condition (c) du théorème implique*

$$d\omega(\xi, J\xi, \zeta) = 0\,, \quad \forall \xi, \zeta \in T_xM\,, \quad \forall x \in M\,. \tag{7}$$

Remarque. Ce lemme dit précisément que les sous-variétés complexes locales de dimension 2 sont kählériennes avec la métrique hermitienne induite, car cela équivaut à dire que $d\omega(\xi, \eta, \zeta) = 0$ chaque fois que les trois vecteurs $\xi, \eta, \zeta \in T_xM$ sont linéairement dépendants sur $\mathbf{C}$. Mais dans ce cas l'espace $\mathbf{R}$-linéaire engendré par ξ, η, ζ est de dimension $\leqslant 2$ ce qui entraîne $d\omega(\xi, \eta, \zeta) = 0$, ou il contient une base réelle de la forme $(\tilde{\xi}, J\tilde{\xi}, \tilde{\zeta})$, ce qui implique également $d\omega(\xi, \eta, \zeta) = 0$ à cause de (7).

LEMME 2. *Si la forme fondamentale ω de la métrique hermitienne donnée vérifie (7), elle est déjà fermée.*

Démonstration du lemme 1. Soit $x \in M$. Il suffit de prouver $d\omega(\xi, J\xi, \zeta) = 0$ pour $\xi, \zeta \in T_xM$ avec $\|\xi\| = 1, \zeta \perp \xi, J\xi$. Nous prolongeons $\xi, J\xi$ et ζ en champs de vecteurs sur un voisinage de x comme suit: Il existe un voisinage de x dans M avec un feuilletage analytique complexe dont les feuilles sont des sous-variétés complexes de dimension 1 et tel que ξ soit tangent à la feuille passant par x. On prolonge maintenant ξ et ζ par des champs de vecteur nommés également ξ et ζ de sorte que ξ soit tangent aux feuilles avec $\|\xi\| \equiv 1$ et que ζ y soit perpendiculaire. Cela nous permet de calculer $d\omega(\xi, J\xi, \zeta)$ par la formule suivante (cf. [1]):

$$\begin{aligned} d\omega(\xi, J\xi, \zeta) &= \xi(\omega(J\xi, \zeta)) + J\xi(\omega(\zeta, \xi)) + \zeta(\omega(\xi, J\xi)) \\ &\quad - \omega([\xi, J\xi], \zeta) - \omega([J\xi, \zeta], \xi) - \omega([\zeta, \xi], J\xi)\,. \end{aligned}$$

Les formules (2) et (3) du premier paragraphe montrent bien que les trois premiers termes sont nuls et que le quatrième l'est également pour la même raison parce que $[\xi, J\xi]$ est tangent aux feuilles, donc perpendiculaire à $J\zeta$. Ainsi de l'expression pour $d\omega(\xi, J\xi, \zeta)$ il ne reste que

$$\begin{aligned} d\omega(\xi, J\xi, \zeta) &= -\omega([J\xi, \zeta], \xi) - \omega([\zeta, \xi], J\xi) \\ &= -<[J\xi, \zeta], J\xi> + <[\zeta, \xi], \xi> \\ &= -<D_{J\xi}\zeta, J\xi> + <D_\zeta J\xi, J\xi> \\ &\quad + <D_\zeta \xi, \xi> - <D_\xi \zeta, \xi> \\ &= -<D_{J\xi}\zeta, J\xi> - <D_\xi \zeta, \xi> \end{aligned}$$

et c'est la trace de l'application de Weingarten W^ζ qui est nulle par hypothèse. (Les deux autres termes dans l'avant-dernière somme sont nuls par notre choix de ξ avec $\|\xi\| \equiv 1$).

Démonstration du lemme 2. Comme nous l'avons déjà remarqué, la condition (7) implique $d\omega(\xi, \eta, \zeta) = 0$ si $\xi, \eta, \zeta \in T_xM$ sont linéairement dépendants sur **C**. Traitons donc maintenant du cas où ξ, η, ζ sont linéairement indépendants sur **C**: Un changement linéaire des coordonnées holomorphes données nous en fournit de nouvelles pour un voisinage de x, $z_1 = x_1 + iy_1, \ldots, z_n = x_n + iy_n$, telles que $\xi = \frac{\partial}{\partial x_1}(x)$, $\eta = \frac{\partial}{\partial x_2}(x)$ et $\zeta = \frac{\partial}{\partial x_3}(x)$ Prolongeons ξ, η, ζ par les champs de vecteur $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}$ et $\frac{\partial}{\partial x_3}$ respectifs. Alors $J\xi = \frac{\partial}{\partial y_1}$, et $J\eta = \frac{\partial}{\partial y_2}$ $J\zeta = \frac{\partial}{\partial y_3}$, d'après (1).

Soient maintenant $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\zeta}$ trois vecteurs quelconques parmi ξ, η, ζ, $J\xi, J\eta, J\zeta$. Alors, $[\tilde{\xi}, \tilde{\eta}] = [\tilde{\eta}, \tilde{\zeta}] = [\tilde{\zeta}, \tilde{\xi}] = 0$, et on obtient

$$d\omega(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\zeta}) = \tilde{\xi} <\tilde{\eta}, J\tilde{\zeta}> + \tilde{\eta} <\tilde{\zeta}, J\tilde{\xi}> + \tilde{\zeta} <\tilde{\xi}, J\tilde{\eta}> \tag{8}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} d\omega(\xi + J\eta, J\xi - \eta, \zeta) &= d\omega(\xi, J\xi, \zeta) + d\omega(\eta, J\eta, \zeta) \\ &\quad - d\omega(\xi, \eta, \zeta) - d\omega(J\xi, J\eta, \zeta). \end{aligned}$$

Dans cette équation, le terme à gauche et les deux premières expressions à droite sont nuls par l'hypothèse (7), ce qui implique la relation

$$d\omega(\xi, \eta, \zeta) = -d\omega(J\xi, J\eta, \zeta)$$

(qui, en effet, est équivalente à (7)).

En appliquant (8) avec $\tilde{\xi} = J\xi, \tilde{\eta} = J\eta, \tilde{\zeta} = \zeta$, nous obtenons

$$\begin{aligned} d\omega(\xi,\eta,\zeta) &= -J\xi < J\eta, J\zeta > - J\eta < \zeta, -\xi > - \zeta < J\xi, -\eta > \\ &= -J\xi < \eta, \zeta > + J\eta < \zeta, \xi > - \zeta < \xi, J\eta > . \end{aligned}$$

Finalement on permute les vecteurs ξ, η, ζ de façon cyclique et on prend la somme des trois égalités ainsi obtenues:

$$\begin{aligned} 3d\omega(\xi,\eta,\zeta) &= -J\xi < \eta, \zeta > + J\eta < \zeta, \xi > - \zeta < \xi, J\eta > \\ &\quad - J\eta < \zeta, \xi > + J\zeta < \xi, \eta > - \xi < \eta, J\zeta > \\ &\quad - J\zeta < \xi, \eta > + J\xi < \eta, \zeta > - \eta < \zeta, J\xi > \\ &= -d\omega(\xi,\eta,\zeta), \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve de $d\omega(\xi, \eta, \zeta) = 0$.

Remarque. La démonstration du lemme 1 reste valable si l'on remplace l'ensemble de toutes les sous-variétés complexes locales de dimension 1 par une famille $\mathscr{F}$ suffisamment large: Les éléments de $\mathscr{F}$ doivent être à la fois des sous-variétés complexes locales de dimension 1 et des surfaces minimales par rapport à la métrique riemannienne induite, et pour chaque $x \in M$ et chaque vecteur tangent $\xi \in T_x M$ on doit avoir un feuilletage local par des membres de la famille $\mathscr{F}$ de sorte que la feuille passant par x ait ξ comme vecteur tangent. Ainsi il suffit par exemple de contrôler pour une métrique hermitienne donnée sur l'espace projectif $\mathbf{CP}^n$ que toutes les droites projectives dans $\mathbf{CP}^n$ sont des surfaces minimales par rapport à la métrique riemannienne induite.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HOLMANN, H. und H. RUMMLER. *Alternierende Differentialformen.* Bibliographisches Institut (1972).

[2] KOBAYASHI, S. and K. NOMIZU. *Foundations of Differential Geometrie.* John Wiley & Sons (1963/69).

[3] MARTINELLI, E. Generalizzazione dei teoremi di minimo volume di Wirtinger a tutte le varietà kähleriane o quasi-kähleriane. *Ann. Mat. Pura et Appl. 4/50* (1960), pp. 135-147.

[4] WIRTINGER, W. Eine Determinantenidentität und ihre Anwendung auf analytische Gebilde in Euklidischer und Hermitischer Massbestimmung. *Monatsh. f. Math. u. Phys. 44* (1936), pp. 343-365.

(Reçu le 1er mai 1978)

Hansklaus Rummler

Institut des Hautes Etudes scientifiques
F-91440 — Bures-sur-Yvette