§1. Solution presque-périodiques de l'équation $\left(\frac{d}{dt}-A \right)u = 0$

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1978)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Nous étudions la presque-périodicité des fonctions $u(t)$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathscr{X}$, vérifiant une équation différentielle

$$u'(t) = Au(t) + f(t)$$

A étant un opérateur linéaire de domaine $\mathscr{D}(A)$ dans l'espace $\mathscr{X}$, alors que $f(t)$ est identiquement nulle ou bien est une fonction presque-périodique. En fait, une partie des résultats est valable dans les espaces de Hilbert seulement, en particulier les théorèmes du § 4 concernant les solutions faibles minimales.

Un autre groupe de résultats (Th. 2.1, 2.2, 3.1, 3.2) porte sur l'équivalence entre les solutions à trajectoire bornée ou relativement compacte et les solutions presque-périodiques; l'origine de ce genre de théorème remonte à Bohr-Neugebauer et Bochner (consulter la Bibliographie, par exemple [1], [5], [12], [13]).

§ 1. Solution presque-périodiques de l'équation $\left(\frac{d}{dt} - A\right) u = 0$

Au début nous allons considérer le cas de l'équation

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t)$$

dans un espace de Banach $\mathscr{X}$, A étant un opérateur linéaire continu de $\mathscr{X}$ en lui-même, et $x(t)$ une fonction continûment différentiable, de $\mathbf{R}$ dans $\mathscr{X}$. Dans ce cas, toute solution s'écrit sous la forme

$$x(t) = U(t)\,x(0),$$

$U(t)$ étant défini comme exponentielle [1]:

$$U(t) = e^{At} = I + \frac{tA}{1!} + \frac{t^2A^2}{2!} + \dots \frac{t^nA^n}{n!} + \dots$$

Nous posons la définition suivante (selon [6]):

Définition 1.1. L'espace de Banach $\mathscr{X}$ est parfait si les conditions

$x(t)$ bornée de $\mathbf{R}$ dans $\mathscr{X}$

$x'(t)$ presque périodique de $\mathbf{R}$ dans $\mathscr{X}$

entraînent

$x(t)$ est presque-périodique de $\mathbf{R}$ dans $\mathscr{X}$.

---

[1]) Voir [7], [8], [9].

On a ici le résultat suivant ([6]):

THÉORÈME 1.1. *Soit A un opérateur linéaire compact dans l'espace de Banach parfait $\mathscr{X}$. Supposons aussi que*

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} \| e^{At} \| < \infty .$$

Alors, toute solution $x(t)$ de l'équation $x'(t) = Ax(t)$ est presque-périodique.

Démonstration. Vu que $x(t) = e^{At} x(0)$, il suit que toute solution est bornée. Par suite, l'ensemble $\{ Ax(t) \}_{t \in \mathbf{R}}$ est relativement compact dans $\mathscr{X}$, et donc l'ensemble $\{ (x'(t) \}_{t \in \mathbf{R}}$ a la même propriété.

Il est bien connu (voir [1], [2], [5]) qu'une fonction continue $f(t)$, $t \in \mathbf{R}$ dans un espace de Banach est presque périodique si et seulement si toute suite de réels $(h_n)_1^\infty$ contient une sous-suite $(h_{n_p})_1^\infty$, telle que la suite de fonctions $(f(t+h_{n_p}))_1^\infty$ soit de Cauchy dans la convergence forte de $\mathscr{X}$, uniforme pour $t \in \mathbf{R}$.

Nous appliquons ce résultat pour déduire la presque-périodicité de $x'(t)$ (et donc de $x(t)$, vu que $\mathscr{X}$ est parfait). Nous pouvons trouver une suite partielle $(h_{n_p})_1^\infty$ de façon que la suite $\{ x'(h_{n_p}) \}_1^\infty$ soit de Cauchy dans $\mathscr{X}$. On a ensuite:

$$\begin{aligned} x'(t+h_{n_p}) &= A\,x(t+h_{n_p}) \\ &= Ae^{A(t+h_{n_p})}\,x(0) = Ae^{At}\,e^{Ah_{n_p}}\,x(0) = Ae^{At}\,x(h_{n_p}) \\ &= e^{At}\,Ax(h_{n_p}) = e^{At}\,x'(h_{n_p}) . \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \| x'(t+h_{n_p}) - x'(t+h_{n_q}) \| &= \| e^{At}(x'(h_{n_p}) - x'(h_{n_q})) \| \\ &\leqslant \sup_{-\infty < t < \infty} \| e^{At} \| \, \| x'(h_{n_p}) - x'(h_{n_q}) \| \end{aligned}$$

Cela prouve le résultat voulu.

§ 2. PRESQUE-PÉRIODICITÉ DES SOLUTIONS BORNÉES

On considère l'équation non-homogène,

$$x'(t) = Ax(t) + f(t)$$

dans un espace de Hilbert. On a premièrement le résultat suivant (voir par exemple [13]).