Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 24 (1978)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SOLUTIONS PRESQUE-PÉRIODIQUES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ABSTRAITES

Autor: Zaidman, S.

Kapitel: §1. Solution presque-périodiques de l'équation $\left(\frac{d}{dt}-A \right)u = 0$

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-49693

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Nous étudions la presque-périodicité des fonctions $u(t)$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathscr{X}$, vérifiant une équation différentielle

$$u'(t) = Au(t) + f(t)$$

A étant un opérateur linéaire de domaine $\mathscr{D}(A)$ dans l'espace $\mathscr{X}$, alors que $f(t)$ est identiquement nulle ou bien est une fonction presque-périodique. En fait, une partie des résultats est valable dans les espaces de Hilbert seulement, en particulier les théorèmes du § 4 concernant les solutions faibles minimales.

Un autre groupe de résultats (Th. 2.1, 2.2, 3.1, 3.2) porte sur l'équivalence entre les solutions à trajectoire bornée ou relativement compacte et les solutions presque-périodiques; l'origine de ce genre de théorème remonte à Bohr-Neugebauer et Bochner (consulter la Bibliographie, par exemple [1], [5], [12], [13]).

§ 1. Solution presque-périodiques de l'équation $\left(\frac{d}{dt} - A\right) u = 0$

Au début nous allons considérer le cas de l'équation

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t)$$

dans un espace de Banach $\mathscr{X}$, A étant un opérateur linéaire continu de $\mathscr{X}$ en lui-même, et $x(t)$ une fonction continûment différentiable, de $\mathbf{R}$ dans $\mathscr{X}$. Dans ce cas, toute solution s'écrit sous la forme

$$x(t) = U(t)\,x(0),$$

$U(t)$ étant défini comme exponentielle [1]:

$$U(t) = e^{At} = I + \frac{tA}{1!} + \frac{t^2A^2}{2!} + \dots \frac{t^nA^n}{n!} + \dots$$

Nous posons la définition suivante (selon [6]):

Définition 1.1. L'espace de Banach $\mathscr{X}$ est parfait si les conditions

$x(t)$ bornée de $\mathbf{R}$ dans $\mathscr{X}$

$x'(t)$ presque périodique de $\mathbf{R}$ dans $\mathscr{X}$

entraînent

$x(t)$ est presque-périodique de $\mathbf{R}$ dans $\mathscr{X}$.

---

[1]) Voir [7], [8], [9].

On a ici le résultat suivant ([6]):

THÉORÈME 1.1. *Soit A un opérateur linéaire compact dans l'espace de Banach parfait $\mathscr{X}$. Supposons aussi que*

$$\sup_{t \in \mathbf{R}} \| e^{At} \| < \infty .$$

Alors, toute solution $x(t)$ de l'équation $x'(t) = Ax(t)$ est presque-périodique.

Démonstration. Vu que $x(t) = e^{At} x(0)$, il suit que toute solution est bornée. Par suite, l'ensemble $\{ Ax(t) \}_{t \in \mathbf{R}}$ est relativement compact dans $\mathscr{X}$, et donc l'ensemble $\{ (x'(t) \}_{t \in \mathbf{R}}$ a la même propriété.

Il est bien connu (voir [1], [2], [5]) qu'une fonction continue $f(t)$, $t \in \mathbf{R}$ dans un espace de Banach est presque périodique si et seulement si toute suite de réels $(h_n)_1^\infty$ contient une sous-suite $(h_{n_p})_1^\infty$, telle que la suite de fonctions $(f(t+h_{n_p}))_1^\infty$ soit de Cauchy dans la convergence forte de $\mathscr{X}$, uniforme pour $t \in \mathbf{R}$.

Nous appliquons ce résultat pour déduire la presque-périodicité de $x'(t)$ (et donc de $x(t)$, vu que $\mathscr{X}$ est parfait). Nous pouvons trouver une suite partielle $(h_{n_p})_1^\infty$ de façon que la suite $\{ x'(h_{n_p}) \}_1^\infty$ soit de Cauchy dans $\mathscr{X}$. On a ensuite:

$$\begin{aligned} x'(t+h_{n_p}) &= A\,x(t+h_{n_p}) \\ &= Ae^{A(t+h_{n_p})}\,x(0) = Ae^{At}\,e^{Ah_{n_p}}\,x(0) = Ae^{At}\,x(h_{n_p}) \\ &= e^{At}\,Ax(h_{n_p}) = e^{At}\,x'(h_{n_p}) . \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \| x'(t+h_{n_p}) - x'(t+h_{n_q}) \| &= \| e^{At}(x'(h_{n_p}) - x'(h_{n_q})) \| \\ &\leqslant \sup_{-\infty < t < \infty} \| e^{At} \| \, \| x'(h_{n_p}) - x'(h_{n_q}) \| \end{aligned}$$

Cela prouve le résultat voulu.

§ 2. PRESQUE-PÉRIODICITÉ DES SOLUTIONS BORNÉES

On considère l'équation non-homogène,

$$x'(t) = Ax(t) + f(t)$$

dans un espace de Hilbert. On a premièrement le résultat suivant (voir par exemple [13]).