I.2. Les tangentes en un point d'une courbe plane

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

sition 2) à n feuilles de l'espace D_1^* à groupe fondamental abélien. Il existe donc un isomorphisme analytique Φ^* rendant le diagramme

$$\begin{tikzcd} D(r)^* \arrow[rr, "\Phi^*"] \arrow[dr] & & \gamma_D^* \arrow[dl, "\pi^*"] \\ & D_1^* & \end{tikzcd}$$

commutatif. Comme Φ^* est borné, il se prolonge par continuité en un morphisme bijectif $\Phi: D(r) \to \gamma_D$ de la forme $t \mapsto (t^n, \varphi(t))$ avec $\varphi \in \mathcal{O}(D(r))$. C'est alors un exercice facile de topologie générale de montrer que Φ est un homéomorphisme. ■

COROLLAIRE. Les courbes planes irréductibles sont des *variétés topologiques.*

Notons qu'une courbe plane (plus généralement une sous-variété de $\mathbf{C}^k$) analytiquement singulière n'est jamais une variété différentiable; voir par exemple [14], §2.

La proposition 3 exprime γ_D paramétriquement par $x = t^n$ et

$$y = \varphi(t) = a_0 t^m + a_1 t^{m+1} + \ldots + a_k t^{m+k} + \ldots (a_0 \neq 0);$$

on montre facilement qu'on ne restreint pas la généralité en supposant $m \geqslant n$. On écrit aussi

$$y = a_0 x^{m/n} + a_1 x^{(m+1)/n} + \ldots + a_k x^{(m+k)/n} + \ldots$$

et on parle alors du *développement de Puiseux* ou de la *série fractionnaire* associé au germe considéré.

I.2. LES TANGENTES EN UN POINT D'UNE COURBE PLANE

Soient k un entier positif et $\mathrm{Ev}: {}_k\mathcal{O} \to \mathbf{C}$ l'évaluation à l'origine, qui n'est autre que la projection canonique de l'anneau local ${}_k\mathcal{O}$ sur son corps résiduel.

PROPOSITION 4. L'anneau local ${}_k\mathcal{O}$ est *hensélien.* En d'autres termes, soient $P \in {}_k\mathcal{O}[t]$ un polynôme unitaire et $\rho, \sigma \in \mathbf{C}[t]$ des polynômes unitaires étrangers tels que $\mathrm{Ev}(P) = \rho\sigma$. Alors il existe des polynômes unitaires R et S dans ${}_k\mathcal{O}[t]$ avec $P = RS$, $\mathrm{Ev}(R) = \rho$ et $\mathrm{Ev}(S) = \sigma$.

Attention : P n'est pas nécessairement un polynôme de Weierstrass.

Preuve. Notons $\mathrm{Ev}(P)(t) = P(0, t) = \prod (t-\lambda_j)^{s_j}$, avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ distincts. (Dans cette preuve, les produits $\prod$ portent sur l'indice j de 1 à n et les $\prod'$ portent sur j de 2 à n). Nous voulons montrer par induction sur n qu'il existe des polynômes unitaires $P_1, \ldots, P_n$ dans ${}_k\mathcal{O}[t]$ avec $P = \prod P_j$ et $\mathrm{Ev}(P_j)(t) = (t-\lambda_j)^{s_j}$. Cette assertion étant trivialement vraie pour $n = 1$, on peut supposer $n \geqslant 2$ et qu'elle est vraie pour tous les polynômes dont l'évaluation a au plus $n - 1$ racines distinctes.

Supposons d'abord que $P(0, 0) = 0$ et que $\mathrm{Ev}(P) = t^{s_1} \prod' (t-\lambda_j)^{s_j}$. Le théorème de préparation permet d'écrire

$$P(x; t) = u(x, t)\,[t^{s_1} + a_1(x)\,t^{s_1-1} + \ldots + a_{s_1}(x)]$$

où u est un polynôme de ${}_k\mathcal{O}[t]$ inversible dans ${}_{k+1}\mathcal{O}$ et où les a_j sont des germes dans ${}_k\mathcal{O}$ qui sont nuls à l'origine. Par suite

$$Ev(P)(t) = u(0, t)\,t^{s_1} = t^{s_1} \prod' (t-\lambda_j)^{s_j}$$

et $u(0, t) = \prod' (t-\lambda_j)^{s_j}$. Par hypothèse d'induction, il existe $P_2, \ldots, P_n$ dans ${}_k\mathcal{O}[t]$ avec $u = \prod' P_j$ et $P_j(0, t) = (t-\lambda_j)^{s_j}$ pour $j = 2, \ldots, n$. On achève en posant

$$P_1(x, t) = t^{s_1} + a_1(x)\,t^{s_1-1} + \ldots + a_{s_1}(x)\,.$$

Supposons au contraire que $P(0, 0) \neq 0$. Soient $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $P(0, \lambda) = 0$ et P^T le polynôme défini par $P^T(x, t) = P(x, t+\lambda)$. Alors P^T est un produit de n facteurs P_j^T par l'argument précédent et on achève en posant $P_j(x, t) = P_j^T(x, t-\lambda)$ pour $j = 1, \ldots, n$. ■

Notons qu'il existe d'autres définitions (équivalentes à celle de la proposition) pour un anneau local d'être hensélien; voir par exemple [AC, III, §4, ex. 3].

Soient $\underline{\gamma}$, D_2, f et γ_D comme au début de la section 1. Ecrivons la série de Taylor de f à l'origine sous la forme $f(x, y) = \sum h_j(x, y)$ (somme sur j de p à l'infini), où h_j est un polynôme homogène de degré j en x et y et où $h_p \neq 0$. Le polynôme h_p est un produit de facteurs linéaires. Quitte à modifier les axes de coordonnées, on peut supposer que h_p ne s'annule pas sur la droite d'équation $x = 0$, donc que $h_p(x, y) = c \prod (y-\lambda_j x)^{s_j}$ avec c un nombre complexe, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ des nombres complexes distincts, et $s_1, \ldots, s_m$ des entiers positifs de somme p. Les droites d'équation $y = \lambda_j x$ sont par définition les *tangentes* de $\underline{\gamma}$. Pour chaque entier $j \geqslant p$, on a $h_j(0, y)$ proportionnel à y^j, et $h_p(0, y) = cy^p$ avec $c \neq 0$. Par suite, f est une fonction régulière d'ordre p en y; avec les notations du début de la section 1, on a donc $p = n$. Cet entier s'appelle la *multiplicité* de f à l'origine; il ne dépend pas des coordonnées choisies sur $\mathbf{C}^2$.

PROPOSITION 5. Si $\underline{\gamma}$ a plusieurs tangentes, alors $\underline{f}$ est réductible.

Preuve. Comme

$$f(x, y) = y^n + a_1(x)\, y^{n-1} + \ldots + a_n(x) = \sum_{j=n}^{\infty} h_j(x, y)$$

l'ordre du zéro de a_i à l'origine est au moins i ($i = 1, \ldots, n$). Nous écrirons

$$f(x, y) - h_n(x, y) = b_1(x)\, y^{n-1} + b_2(x)\, y^{n-2} + \ldots + b_n(x)$$

et $b_i(x) = x^{i+1} c_i(x)$, où c_i représente un germe holomorphe à l'origine ($i = 1, \ldots, n$).

Si u et v décrivent de petits voisinages de l'origine dans $\mathbf{C}$, la fonction $(u, v) \mapsto f(v, uv)$ est divisible par v^n. Définissons $\underline{\tilde{f}} \in {}_2\mathcal{O}$ par $\tilde{f}(u, v) = v^{-n} f(v, uv)$; on a donc

$$\tilde{f}(u, v) = h_n(1, u) + vc_1(v)\, u^{n-1} + vc_2(v)\, u^{n-2} + \ldots + vc_n(v)\,.$$

L'évaluation Ev: ${}_1\mathcal{O} \to \mathbf{C}$ associe au polynôme $\tilde{f} \in {}_1\mathcal{O}[u]$ le polynôme $u \mapsto h_n(1, u)$ de $\mathbf{C}[u]$.

Si $\underline{\gamma}$ a plusieurs tangentes, il résulte de la proposition 4 que $\tilde{f}$ est un produit dans ${}_1\mathcal{O}[u]$ de polynômes unitaires $\tilde{g}$ et $\tilde{h}$ de degrés respectifs $r < n$ et $s < n$. Définissons alors g et h dans ${}_1\mathcal{O}[y]$ par $g(x, y) = x^r \tilde{g}(y/x, x)$ et $h(x, y) = x^s \tilde{h}(y/x, x)$. Alors $f = gh$ et $\underline{f}$ est réductible. ■

La signification géométrique de $\tilde{f}$ dans la preuve ci-dessus sera éclairée au numéro suivant.

Par exemple, le polynôme réductible xy définit une courbe ayant deux tangentes à l'origine. La réciproque à la proposition 5 n'est pas vraie car le polynôme réductible $x(x^2 - y^3)$ définit une courbe n'ayant qu'une tangente à l'origine.

I.3. ECLATEMENT ET IRRÉDUCTIBILITÉ

Pour tout entier positif k, nous noterons h la projection canonique de $\mathbf{C}^{k+1} - \{0\}$ sur l'espace projectif P^k; nous écrirons $(\omega_0, \ldots, \omega_k)$ les coordonnées d'un vecteur de $\mathbf{C}^{k+1}$ et $[z_0, \ldots, z_k]$ les coordonnées homogènes d'un point de P^k. Introduisons la variété