II. SINGULARITÉS NORMALES DANS C^3

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1979)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

applique un point (x, y) sur l'intersection avec $\mathbf{S}^3$ de l'image du chemin $\begin{cases} \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{C}^2 \\ t \mapsto (t^2x, t^5y) \end{cases}$. En particulier γ^* est connexe et $\underline{f}$ est bien irréductible.

La transformée stricte de f est donnée par

$$\tilde{f}(u, v) = v^{-2}(v^5 + (uv)^2) = u^2 + v^3$$

qui est comme f de multiplicité 2. La tangente de $\underline{\tilde{f}}$ est la droite d'équation $u = 0$, qui est transverse à E_0.

Soient alors $D_2 = \mathbf{C}^2$ et $g(x, y) = x^3 + y^2$ de sorte que $\underline{g} = \underline{\tilde{f}}$ (pas $g(x, y) = x^2 + y^3$ qui aurait comme tangente la droite d'équation $x = 0$). On a $\tilde{g}(u, v) = u^2 + v$, qui est de multiplicité 1, et dont la tangente à l'origine est bien E_0.

Exemple 4. $D_2 = \mathbf{C}^2$ et $f(x, y) = y^5 + x^5y + g(x, y)$ avec g de multiplicité 8 au moins. Montrons que $\underline{f}$ est réductible.

On a $\tilde{f}(u, v) = u^5 + uv + h(u, v)$ avec h d'ordre 3 au moins. Donc $\underline{\tilde{f}}$ a deux tangentes, d'où l'assertion par les propositions 5 et 6 (jj).

II. SINGULARITÉS NORMALES DANS $\mathbf{C}^3$

II.1. Ensembles normaux

Si X est un ensemble analytique, $X_{\text{rég}}$ désigne l'ouvert de ses *points réguliers*; on sait qu'il est dense dans X. (Voir le corollaire de la proposition 1 si X est une courbe plane, l'argument de la proposition 7 ci-dessous si X est une hypersurface dans $\mathbf{C}^k$, et le théorème III. C.3 de [8] en général.)

Rappelons qu'un ensemble X est *irréductible* en un point p si X n'est pas au voisinage de p réunion de deux sous-ensembles propres. Dans ce cas, on peut trouver un voisinage de p dont la trace sur $X_{\text{rég}}$ est connexe. Réciproquement, s'il existe un bon voisinage U de P dans X dont la trace sur $X_{\text{rég}}$ est connexe, alors X est irréductible en p. (Voir la proposition 2 si X est une courbe plane, et la fin de la section III.C de [8] pour le cas général.) Le terme de « bon voisinage » pour U signifie qu'il existe une base de voisinages $\{U_\alpha\}$ de p dans X telle que chaque $U_\alpha - \{p\}$ soit un rétracte par déformation de $U - \{p\}$; voir [21].

On appelle fonction *faiblement holomorphe* sur un voisinage ouvert U d'un point p de X une fonction définie et holomorphe sur $U \cap X_{\text{rég}} - \{p\}$ qui est bornée sur $K \cap X_{\text{rég}} - \{p\}$ pour tout compact K de U; on dit que l'espace X est *normal* en p si toute fonction de ce type admet un prolongement (nécessairement unique par continuité) en une fonction holomorphe sur U. Par exemple, X est normal en tous ses points réguliers (c'est un cas particulier du théorème d'extension de Riemann) et n'est normal en aucun de ses points réductibles (choisir un voisinage connexe U de p dans X et une partition $U_0 \cup U_1$ de $U \cap X_{\text{rég}}$ en ouverts disjoints non vides, puis définir f comme valant 0 sur U_0 et 1 sur U_1). Soit $\mathcal{O}_{X,p}$ l'anneau des germes de fonctions holomorphes au voisinage d'un point p de X; pour que X soit normal en p, il faut et il suffit que $\mathcal{O}_{X,p}$ soit intégralement clos. (La nécessité résulte immédiatement des définitions; pour la suffisance, voir par exemple [18]; en général, la clôture intégrale de $\mathcal{O}_{X,p}$ coïncide avec l'anneau des germes de fonctions faiblement holomorphes.)

C'est un corollaire facile de la proposition 3 qu'une courbe plane est normale en un point si et seulement si elle y est lisse. Soient par exemple

$$\gamma = \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 \mid x^2 = y^3\} \qquad \text{et} \qquad f: \begin{cases} \gamma - \{0\} \to \mathbf{C} \\ (x, y) \mapsto x/y\,; \end{cases}$$

alors f a un prolongement continu non holomorphe qui applique l'origine de $\mathbf{C}^2$ sur 0, de sorte que γ n'est pas normale à l'origine. Dans toute courbe (plane ou non), on sait que les points normaux coïncident avec les points lisses. L'objet de ce chapitre est d'examiner la nature des singularités des surfaces normales dans $\mathbf{C}^3$.

Dans les sections suivantes, nous ferons un usage répété d'un théorème de H. Cartan [3]: Soient M une variété lisse et G un *groupe fini* opérant holomorphiquement sur M. Alors l'espace des orbites $X = M/G$ possède une structure canonique d'ensemble analytique normal (= normal en chaque point). Si $\pi: M \to X$ est la projection canonique, U un ouvert de X, et $f: U \to \mathbf{C}$ une application, alors f est holomorphe pour la structure en question si et seulement si $f\pi$ l'est sur $\pi^{-1}(U)$.

II.2. Les singularités des surfaces normales dans $\mathbf{C}^3$ sont isolées

Soit $\underline{\Gamma}$ un germe de surface plongé dans $\mathbf{C}^3$. On peut supposer $\underline{\Gamma}$ donné par les zéros d'un polynôme de Weierstrass. Plus précisément, il existe

1°) Un polycylindre D_3 dans $\mathbf{C}^3$, centré à l'origine; nous noterons D_2 et D_1 ses traces sur le plan d'équation $z = 0$ et sur la droite d'équations $y = z = 0$.

2°) Un polynôme de Weierstrass $F \in \mathcal{O}(D_2)[z]$, c'est-à-dire une fonction $F \in \mathcal{O}(D_3)$ avec

$$F(x, y, z) = z^n + a_1(x, y) z^{n-1} + \ldots + a_n(x, y)$$

pour tous $(x, y, z) \in D_3$, où les a_j sont des fonctions holomorphes dans D_2 qui s'annulent à l'origine.

La germe $\underline{\Gamma}$ est alors représenté par $\Gamma_D = \{(x, y, z) \in D_3 \mid F(x, y, z) = 0\}$. Nous écrirons plus simplement Γ si $D_3 = \mathbf{C}^3$. On peut toujours remplacer D_3 par un polycylindre plus petit; en particulier, on pourra toujours supposer que la projection canonique fournit une application surjective π de Γ_D sur D_2. Si $n = 1$, la surface Γ_D est lisse à l'origine; nous supposerons désormais $n \geqslant 2$.

Nous noterons γ_D l'ensemble analytique $\{(x, y) \in D_2 \mid \mathrm{Dis}(F)(x, y) = 0\}$. Nous allons voir que ce *lieux discriminant* définit un germe $\underline{\gamma}$ de courbe plane qui joue un rôle important dans l'étude de $\underline{\Gamma}$.

Proposition 7. Le lieux discriminant est une courbe passant par l'origine. Si D_3 est suffisamment petit, alors $\gamma_D^* = \gamma_D - \{0\}$ est lisse et π fournit par restriction un *revêtement holomorphe* $\Gamma_D - \pi^{-1}(\gamma_D) \to D_2 - \gamma_D$ à n feuilles. De plus, si $\underline{\Gamma}$ est normal, alors $\Gamma_D^* = \Gamma_D - \{0\}$ est lisse.

Preuve. Les mêmes arguments que ceux de la preuve de la proposition 1 montrent: d'abord que Dis (F) est une fonction holomorphe dans D_2 qui s'annule à l'origine, et qui est non nulle — donc que γ_D est une courbe plane passant par l'origine et qu'on peut supposer γ_D^* lisse; ensuite que π se restreint en une projection de revêtement de $\Gamma_D - \pi^{-1}(\gamma_D)$ sur $D_2 - \gamma_D$.

Soient alors $(x_0, y_0) \in \gamma_D^*$ et Δ_2 un voisinage de (x_0, y_0) dans D_2 tel que γ_Δ soit lisse. Notons Δ_3 l'ouvert $\{(x, y, z) \in D_3 \mid (x, y) \in \Delta_2\}$. On peut supposer qu'on s'est donné des coordonnées (ξ, η) sur un voisinage de Δ_2 telles que Δ_2 soit le polycylindre défini par $|\xi| < 1$ et $|\eta| < 1$ et telles que $\gamma_\Delta = \{(\xi, \eta) \in \Delta_2 \mid \eta = 0\}$. Nous noterons π_Δ la restriction de π à Γ_Δ. La première partie de la preuve montre que la restriction de π_Δ à $V = \{(\xi, \eta, z) \in \Gamma_\Delta \mid \eta \neq 0\}$ est un revêtement holomorphe à n feuilles.

Soient $V_1, \ldots, V_k$ les composantes connexes de V. Pour chaque $j \in \{1, \ldots, k\}$, notons $\pi_j : V_j \to \Delta_2 - \gamma_\Delta$ la restriction de π_Δ à V_j; c'est un revêtement holomorphe connexe à n_j feuilles (la somme des n_j vaut n).

L'application σ_j de $\{(s, t) \in \mathbf{C}^2 \mid |s| < 1 \text{ et } 0 < |t| < 1\}$ dans $\Delta_2 - \gamma_\Delta$ donnée par $\sigma_j(s, t) = (s, t^{n_j})$ est un revêtement du même type. Le groupe fondamental de $\Delta_2 - \gamma_\Delta$ étant $\mathbf{Z}$, il existe des isomorphismes analytiques inverses l'un de l'autre φ_j et ψ_j rendant le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\{(s,t) \in \mathbf{C}^2 \mid |s| < 1 \quad \text{et} \quad 0 < |t| < 1\} \arrow[rr, shift left, "\varphi_j"] \arrow[dr, "\sigma_j"'] & & V_j \arrow[ll, shift left, "\psi_j"] \arrow[dl, "\pi_j"] \\
& \Delta_2 - \gamma_\Delta &
\end{tikzcd}$$

commutatif. Soient $\overline{V}_j$ l'adhérence de V_j dans Δ_3 (elle est dans Γ_Δ), $\overline{\pi}_j$ la restriction de π_Δ à $\overline{V}_j$ (qui est aussi l'unique extension continue de π_j à $\overline{V}_j$) et $B = \{(s, t) \in \mathbf{C}^2 \mid |s| < 1 \text{ et } |t| < 1\}$. Le théorème d'extension de Riemann implique que φ_j admet un prolongement holomorphe $\overline{\varphi}_j$: $B \to \overline{V}_j$. Nous montrons plus bas que $\overline{V}_j$ est ouvert dans Γ_Δ; en particulier $\overline{V}_j$ est un ensemble normal. Le même théorème de Riemann implique que ψ_j admet un prolongement à $(\overline{V}_j)_{\text{rég}}$, et la définition de la normalité implique que celui-ci s'étend en $\overline{\psi}_j$: $\overline{V}_j \to B$. Les morphismes $\overline{\varphi}_j$ et $\overline{\psi}_j$ sont encore inverses l'un de l'autre; par suite $\overline{V}_j$ est isomorphe à B et Γ_Δ est lisse.

Montrons enfin que $\overline{V}_j$ est ouvert dans Γ_Δ. Soit $p \in \overline{V}_j - V_j$. Comme Γ_Δ est normal, il est irréductible en p et il existe un voisinage U de p dans Γ_Δ avec $U' = U \cap (\Gamma_\Delta)_{\text{rég}}$ connexe. Toujours en vertu du même théorème de Riemann, l'ouvert $U'' = \{(\xi, \eta, z) \in U' \mid \eta \neq 0\}$ est connexe (voir [8], corollaire I.C.4). Montrons que U'' est dans V_j. Si $k = 1$, il n'y a rien à vérifier. Si $k > 1$, supposons au contraire $U'' \not\subset V_j$; alors il existe $i \neq j$ avec $U'' \cap V_i$ non vide. Mais $U'' \cap V_j$ n'est pas vide non plus, d'où l'absurdité puisque V_j et V_i sont des composantes connexes distinctes de V. Donc U'' est bien dans V_j, et U' est dans $\overline{V}_j$; par suite $U \subset \overline{V}_j$. Ceci montre que $\overline{V}_j$ est ouvert dans Γ_Δ et achève la preuve. ■

COROLLAIRE. Les singularités des surfaces normales dans $\mathbf{C}^3$ sont isolées.

On sait que le corollaire est vrai pour toute surface, plongée ou non dans $\mathbf{C}^3$. Un théorème d'Oka affirme que la réciproque du corollaire est vraie; plus généralement, une hypersurface de $\mathbf{C}^k$ dont le lieu singulier est de codimension au moins 2 dans l'hypersurface est un espace normal; voir [19], pages 139-140.

Il n'y a pas d'analogue ici au corollaire de la proposition 3, même pour les surfaces normales; cela résulte par exemple des surfaces étudiées au chapitre III. De fait, un théorème fondamental de Mumford affirme que les singularités analytiques se détectent par le seul groupe fondamental. Plus précisément, soient X une portion de surface plongée dans $\mathbf{C}^k$ et x_0 un point de X; on suppose que $X - \{x_0\}$ est lisse. Soit S une petite sphère centrée en x_0. L'intersection $X \cap S$ est une variété différentiable (si le rayon de la sphère est suffisament petit) de dimension réelle 3; il est facile de voir que le type topologique de cette variété ne dépend pas du rayon de la sphère. Le théorème de Mumford affirme que le groupe fondamental de $X \cap S$ est trivial si et seulement si x_0 est un point lisse de X [16].

II.3. Sur la normalisation

On appelle *normalisation* d'un ensemble analytique X la donnée d'un ensemble normal $\tilde{X}$ et d'un morphisme propre fini surjectif $v\colon \tilde{X} \to X$ ayant la propriété suivante: si $A = v^{-1}(X - X_{\text{rég}})$, alors $\tilde{X} - A$ est dense dans $\tilde{X}$ et la restriction de v est un isomorphisme de $\tilde{X} - A$ sur $X_{\text{rég}}$. Il est facile de montrer que deux normalisations d'un même ensemble sont isomorphes au sens convenable. C'est par contre un résultat très profond que tout espace possède une normalisation (voir [5], appendice au chapitre 2, et [18]); remarquons seulement que nous l'avons essentiellement montré dans le cas très particulier des courbes planes. Nous utiliserons à plusieurs reprises le résultat suivant, qui dit qu'on peut parfois « normaliser les morphismes » (voir par exemple [5], page 2.28).

Proposition 8. Soient X et Y des ensembles analytiques, $v_X\colon \tilde{X} \to X$ et $v_Y\colon \tilde{Y} \to Y$ leurs normalisations, et $f\colon X \to Y$ une application holomorphe telle que $A = f^{-1}(Y_{\text{rég}})$ soit dense dans X. Alors il existe une application holomorphe $\tilde{f}\colon \tilde{X} \to \tilde{Y}$ telle que $v_Y \tilde{f} = f v_X$.

Preuve. Soit $\tilde{A} = v_X^{-1}(A)$. Comme A est dense dans X, il en est de même de $A \cap X_{\text{rég}}$, et $v_X^{-1}(A \cap X_{\text{rég}})$ est dense dans $v_X^{-1}(X_{\text{rég}})$ lui-même dense dans $\tilde{X}$; donc $\tilde{A}$ est dense dans $\tilde{X}$.

La restriction de $f v_X$ applique $\tilde{A}$ dans $Y_{\text{rég}}$ et se relève donc en F: $\tilde{A} \to v_y^{-1}(Y_{\text{rég}})$. Si K est un compact de $\tilde{X}$, alors $(fv_X)(\tilde{A} \cap K) \subset L = (fv_X)(K)$ qui est compact; $F(\tilde{A} \cap K)$ est donc relativement compact dans $\tilde{Y}$ puisque v_y est propre. Par suite, l'image par F de tout compact est relativement compacte, ce qui veut précisément dire que F est bornée.

L'ensemble $\tilde{X} - \tilde{A}$ est contenu dans un sous-ensemble analytique propre de $\tilde{X}$ car $X - A$ est dans $f^{-1}(Y - Y_{\text{rég}})$. Comme $\tilde{X}$ est normal, F se prolonge en un morphisme $\tilde{f}: \tilde{X} \to \tilde{Y}$. Il est évident que $\tilde{f}$ est l'unique morphisme satisfaisant $v_Y \tilde{f} = f v_X$. ■

Sans l'hypothèse que A est dense dans X, il n'y a en général ni existence ni unicité. En effet, soient d'abord X un ensemble normal, $S = \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 | xy = 0\}$ et f l'application de X sur le point double de S. Alors $\tilde{S}$ est réunion disjointe de deux droites, l'image inverse par v_S du point double est formée de deux points, et f a plusieurs relèvements.

Ensuite, l'exemple ci-dessous montre qu'il peut n'exister aucune « normalisée ». Soient T un tore de dimension complexe un, σ une involution sans point fixe de T et X le tore T/σ. Sur le fibré trivial $L = T \times \mathbf{C}$, considérons la relation d'équivalence

$$(a, z) \sim (a', z') \begin{cases} \text{si } a = a' & \text{et} \quad z = z' \\ \text{ou si } a = \sigma(a') & \text{et} \quad z = z' = 0. \end{cases}$$

L'espace quotient Y est muni naturellement d'une structure de fibré analytique $\pi: Y \to X$; si U est un ouvert trivialisant de X pour ce fibré, alors $\pi^{-1}(U) = U \times S$ avec S comme dans l'exemple précédent.

L'ensemble analytique X est lisse, donc normal; l'ensemble $Y_{\text{sing}} = Y - Y_{\text{rég}}$ est de codimension un dans Y (en particulier Y n'est pas normal) et $\tilde{Y}$ se fibre sur X avec pour fibre la réunion disjointe de deux droites. Soit $E = v_Y^{-1}(Y_{\text{sing}})$. Alors $\tilde{Y} - E$ est homéomorphe à $Y_{\text{rég}}$, donc est connexe (car $Y_{\text{rég}}$ est l'image par $L \to Y$ de l'ensemble $L - T \times \{0\}$ qui est connexe); comme il est dense dans $\tilde{Y}$, celui-ci est aussi connexe. Par suite E est connexe, car c'est un rétracte de $\tilde{Y}$, et la restriction de v_Y à E est le revêtement connexe à deux feuilles de Y_{sing}.

Si $f\colon X \to Y$ est la section nulle du fibré π, (de sorte que le A de la proposition 8 est vide), il est alors évident que f ne se relève pas, car cela impliquerait que le revêtement $E \to Y_{\text{sing}} = f(X)$ soit trivial.

$$\begin{tikzcd} & \tilde{Y} \arrow[d, "\nu_X"] \\ X \arrow[r, shift left, "f"] & Y \arrow[l, shift left, "\pi"] \end{tikzcd}$$

III. SINGULARITÉS NORMALES AVEC DISCRIMINANTS A CROISEMENTS NORMAUX

III.1. Les surfaces $A_{n,q}$ et leurs normalisations

Soient n et q des entiers, avec n positif et $q \leqslant n$. Nous noterons $A_{n,q}$ la *surface* $\{(x, y, z) \in \mathbf{C}^3 \mid z^n = xy^{n-q}\}$.

Si $n = 1$, les surfaces ainsi définies sont toutes lisses: l'isomorphisme $(x, y, z) \mapsto (x, y, z - xy^{1-q})$ de $\mathbf{C}^3$ applique $A_{1,n}$ sur l'hyperplan d'équation $z = 0$. De même, si $q = n$, l'isomorphisme $(x, y, z) \mapsto (x - z^n, y, z)$ applique $A_{n,n}$ sur l'hyperplan d'équation $x = 0$. Nous supposerons désormais $n \geqslant 2$ et $q < n$ sauf mention expresse du contraire.

Si $q = n - 1$, les dérivées partielles du polynôme $z^n - xy^{n-q} = z^n - xy$ ne s'annulent simultanément qu'à l'origine, et $A_{n,n-1}$ est lisse en dehors de ce point (donc normale en vertu d'un théorème d'Oka rappelé en II.2). Si $q \leqslant n - 2$, la surface $A_{n,q}$ est lisse en dehors de la droite d'équations $y = z = 0$; nous vérifions ci-dessous que ces points sont effectivement tous singuliers; la proposition 7 montre donc que $A_{n,q}$ n'est pas normale.

Soit $G_{n,q}$ le groupe des isomorphismes de C^2 de la forme $(s, t) \mapsto (\zeta^q s, \zeta t)$ où ζ est une racine n-ième de l'unité; c'est un *groupe cyclique* d'ordre n. Nous noterons $X_{n,q}$ l'*ensemble des orbites*, muni de sa structure canonique d'ensemble analytique normal.

Si $q = 0$, l'ensemble $X_{n,0}$ est lisse: l'application $(s, t) \mapsto (s, t^n)$ passe au quotient et définit un isomorphisme de $X_{n,0}$ sur $\mathbf{C} \times (\mathbf{C}/(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})) \approx \mathbf{C}^2$. Les espaces $X_{n,q}$ et $X_{n,q'}$ sont évidemment identiques si $q' \equiv q$ (modulo n); il suffit donc d'étudier les $X_{n,q}$ pour lesquels $1 \leqslant q < n$ (voir de plus la proposition 13).